Université Claude Bernard Lyon 1
PCSI L2 UE MATH3

CC2 du 24 mars 2014 - 90 minutes

Les calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints. Toute réponse doit être justifiée.

Question 1.

a. Soit $L : V \to W$ une application linéaire.

(a) Donner la définition de l'image $\mathrm{Im}(L)$ de L. (1 pts)

(b) Donner la définition du noyau $\mathrm{Ker}(L)$ de L. (1 pts)

(c) Donner la relation entre $\dim(\mathrm{Im}(L))$, $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ et $\dim(V)$. (1 pts)

b. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (5 pts)

(a) Déterminer les valeurs propres de A.

(b) Déterminer une base formée de vecteurs propres de A.

(c) Donner une matrice diagonale D équivalente à A.

Question 2.

a. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \quad .$$

(3 pts)

b. On considère le système d'équations différentielles couplées

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -5x_1 + 4x_2\,, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= x_1 - 8x_2\,, \end{aligned}$$

(a) Déterminer les modes normaux (c'est-à-dire les vecteurs propres de la matrice associée au système). (1 pts)

(b) Résoudre le système pour la condition initiale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ et $\frac{d}{dt}x_1(0) = \frac{d}{dt}x_2(0) = 0$. Est-ce que la solution est périodique? Si oui, donner sa période. (3 pts)

Question 3.

Soit $\mathbb{R}_2[t]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2, et $L : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'endomorphisme donné par

$$L = t\frac{d}{dt} + t(1+t)\frac{d^2}{dt^2} \quad .$$

a. Donner la matrice de L dans la base $B = \{1, t, t^2\}$. (2 pts)

b. Donner la forme générale des polynômes appartenant à l'image $\mathrm{Im}(L)$. (2 pts)

c. Donner la forme générale des polynômes appartenant au noyau $\mathrm{Ker}(L)$. (2 pts)