Université Claude Bernard Lyon 1
PCSI L2 UE MATH3

CC1 du 18 février 2014 - 45 minutes

Les calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints. Toute réponse doit être justifiée.

Question 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\}$. (3 pts)

b. Déterminer une base pour V. (2 pts)

c. Quelle est la dimension de V? (1 pts)

Question 2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, on considère les vecteurs $[\vec{u}]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\vec{v}]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $[\vec{w}]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $[\vec{z}]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ sont-ils linéairement indépendants (libres)? (1 pts)

b. Choisir une partie $\mathcal{B} \subset \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ qui forme une base de $\mathbb{R}^3$. Justifier votre réponse. (3 pts)

c. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$. (3 pts)

d. Donner la matrice de passage inverse $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. (4 pts)

e. Décomposer le vecteur $[\vec{s}]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. (2 pts)

Question 3. Soit $\mathbb{R}_2[t]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2. Montrer que $W = \{p \in \mathbb{R}_2[t] : p(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[t]$. (3 pts)