Fiche 9 - Séries entières

Exercice 1. Déterminer le développement en série entière en x_0 des fonctions à variable réelle suivantes (en précisant les intervalles de validité du développement) :

$$(1)\ \ f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} \ \text{ en } x_0 = 0, \qquad (2)\ \ f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) \ \text{ en } x_0 = 0,$$

$$(3)\ \ f(x) = \sin(x) \ \text{ en } x_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad (4)\ \ f(x) = \frac{1}{x^2} \ \text{ en } x_0 = 1.$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

1. Calculer une solution particulière non nulle $u(x)$ de l'équation développable en série entière.
2. A l'aide du changement de fonction $y(x) = z(x)u(x)$, trouver la solution générale de l'équation sur $]0;1[$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(x^2 + x)y'' + (1 + 3x)y' + y = 0$$

Déterminer une solution particulière non nulle $u(x)$ de l'équation sur l'intervalle $I =]0, 1[$, puis la solution générale de l'équation sur I de la forme $y = zu$.

Exercices supplémentaires

Exercice 4. Soit $u(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-2)}$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Calculer $u(x)$. (Indication : on pourra tout d'abord calculer $u'(x)$.)

Exercice 5. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - xy' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}, \ \text{ pour tout } n \geq 2.$$

3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence.

Exercice 6. Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes au point indiqué en précisant le domaine de validité du développement :

$$(1)\ f(x) = e^x \text{ en } x_0 = 1, \qquad (2)\ f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ en } x_0 = 0,$$

$$(3)\ f(x) = \ln(1+x+x^2) \text{ en } x_0 = 0, \qquad (4)\ f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \text{ en } x_0 = 0.$$

Exercice 7. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+x^2)y'' - 2y = 0$$

1. On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si
$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2} a_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
2. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0 vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Calculer les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + 2y' + xy = 0$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution f développable en série entière solution de (E) et vérifiant $f(0) = 1$.
2. Quel est le domaine de définition de f ? Calculer f sur ce domaine.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x(1-x)y' + y = x$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$.

1. Calculer a_0, a_1, a_2 et exprimer a_n en fonction de a_{n-1}.
2. Déterminer l'expression de a_n.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.
4. Donner l'expression de $y(x)$ sous forme de fonctions élémentaires.

Exercice 10. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe-t-il une fonction f non nulle développable en série entière au point 0 telle que $f'(x) = f(\alpha x)$? Préciser alors le rayon de convergence de la série obtenue.

Développements usuels

Fonction	Développement en série entière	Domaine de validité
e^x	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\text{ch } x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\text{sh } x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$]-1,1[$

$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{2n}x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{2n}x^{2n} + \cdots$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \cdots$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \cdots$	$]-1,1[$
$\ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots$	$]-1,1[$
$\arctan x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$	$]-1,1[$
$\arcsin x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \cdots$	$]-1,1[$