Fiche 8 - Suites et séries de fonctions, séries entières

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_n$ suivantes :

$$(1)\ \ f_n(x) = \frac{n2^{-x}+x}{n+x},\ \text{sur } [0,1], \qquad (2)\ \ f_n(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^n},\ \text{sur } [0,+\infty[.$$

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}.$$

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer que sa limite f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = -2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+x^2)^2},\ \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1)\ \ \sum\frac{z^n}{n^2}, \qquad (2)\ \ \sum\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n}}z^n, \qquad (3)\ \ \sum\frac{z^{3n}}{2^n}, \qquad (4)\ \ \sum\frac{z^{n^2}}{n}.$$

Exercice 4. Exprimer la somme de chaque série entière sur son disque de convergence que l'on précisera :

$$(1)\ \ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad (2)\ \ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}z^n, \qquad (3)\ \ \sum_{n=0}^{+\infty}n^2z^n, \qquad (4)\ \ \sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)z^{3n+2}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_n$ suivantes :

$$(1)\ f_n(x) = \frac{x}{1+nx},\ \text{sur } [0,1], \qquad (2)\ f_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{1+nx}\right),\ \text{sur } [0,+\infty[,$$

$$(3)\ f_n(x) = nx^2\ e^{-nx},\ \text{sur } [0,\pi], \qquad (4)\ f_n(x) = \sqrt{n}x\ e^{-nx},\ \text{sur } [0,+\infty[.$$

Exercice 6. Étudier la nature des séries $\sum f_n$, de terme général :

$$(1)\ f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)},\ \text{sur } [0,+\infty[, \qquad (2)\ f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}},\ \text{sur } [0,+\infty[.$$

Exercice 7. Étudier la nature des séries $\sum f_n$, de terme général :

$$(1)\ f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2},\ \text{sur }]0,+\infty[, \qquad (2)\ f_n(x) = \frac{(-1)^nx}{(1+x^2)^n},\ \text{sur } \mathbb{R},$$

$$(3)\ f_n(x) = (-1)^n\ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right),\ \text{sur }]0,+\infty[.$$

Exercice 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n(x) = ne^{-nx}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty]$ vers une fonction qu'on notera f.
3. Calculer une primitive de f.
4. Calculer la valeur de f.

Exercice 9. On définit pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est bien définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1 + n + |x|}.$$

Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n$.

Exercice 11. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n \sin(x) \cos^n(x)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

Exercice 12. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$.

1. Montrer que f est définie sur I.
2. Montrer que f est continue sur I.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur I.
4. Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 13. Étudier la convergence éventuelle de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Donner un équivalent de la somme en 0.

Exercice 14. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

1. Montrer que f est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 15. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \ \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n, \qquad (2) \ \sum (1 + \frac{1}{n})^{n^2} z^n, \qquad (3) \ \sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n, \qquad (4) \ \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}.$$

Exercice 16. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \ \sum \frac{n^3 + 1}{3^n} x^n, \qquad (2) \ \sum \frac{\ln n}{n^3} x^n, \qquad (3) \ \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} x^n, \qquad (4) \ \sum \sin^3(\frac{1}{n}) x^n.$$

Exercice 17. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 18. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{pn}$.

Exercice 19. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R.

Exercice 20. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n}x^n.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.