

### Fiche 3 - Systèmes d'équations linéaires

**Exercice 1.** On considère les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ y - z = 7 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

- Déterminer l'écriture matricielle des systèmes  $(S_1)$  et  $(S_2)$ .
- Déterminer les applications linéaires associées aux systèmes  $(S_1)$  et  $(S_2)$ .
- Dire si  $(S_1)$  et  $(S_2)$  admettent des solutions (sans les calculer).

**Exercice 2.** Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

**Exercice 3.** Résoudre, suivant les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ x + \lambda y + z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} (2 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ 2y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 4.** Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

### Exercices supplémentaires

**Exercice 5.** Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$(S) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

**Exercice 6.** Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 + 2i \\ x_1 + (4 + i)x_2 = 3 + i \end{cases}$$

**Exercice 7.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0. \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13. \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

**Exercice 8.** En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de  $x$  dans les systèmes linéaires suivants :

$$a) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ y = 3 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de  $y$  dans les systèmes linéaires suivants :

$$c) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 2, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

**Exercice 9.** (Suite Exercice 4) Calculer les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \\ B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, & B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \\ C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, & C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}. \\ D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, & D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 10.**

- Déterminer pour quelles valeurs de  $a, b$  réelles le système suivant a une solution unique, n'a pas de solution, ou a une infinité de solutions :

$$\begin{cases} ax + 2y + az = 1 \\ ax + (a + 4)y + 3az = -2 \\ -ax - 2y + z = 1 \\ (a + 2)y + (3a + 1)z = b \end{cases}$$

- Pour les systèmes homogènes suivants, indiquer s'ils ont une solution unique ou s'ils en ont une infinité, et dans le dernier cas indiquer la dimension de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

**Exercice 11.** Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$