DEVOIR MAISON

(A rendre au plus tard le 17 décembre 2014)

Exercice 1. (5 pts) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ de terme générale $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$. (1 pt)
2. On note $(S_n)_{n\geq 0}$ la suite des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que
$$S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x)\, dx.$$
(1 pts)
3. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx$. (2 pts)
4. Montrer, en choisissant judicieusement f, que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$. (1 pt)

Exercice 2. (4 pts) Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

1. Montrer que f est définie sur I. (1 pt)
2. Montrer que f est continue sur I. (1 pt)
3. Montrer que f est de classe C^1 sur I. (1 pt)
4. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. (1 pt)

Exercice 3. (2 pts) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(1)\ \sum \frac{n^3+1}{3^n} x^n, \qquad (2)\ \sum \frac{\ln n}{n^3} x^n, \qquad (3)\ \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} x^n, \qquad (4)\ \sum \sin^3(\frac{1}{n}) x^n.$$

Exercice 4. (4 pts) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 5. (5 pts) On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad (1-x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une solution f de (E), développable en série entière au voisinage de 0. Préciser un intervalle ouvert sur lequel f est solution de (E). (2,5 pts)
2. Ecrire f à l'aide de fonctions usuelles. (2,5 pts)