CONTRÔLE CONTINU 3

Mercredi 16 décembre 2015

Durée : 1h15

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (2 pts)

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. (1 pt)
2. Donner la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et son rayon de convergence. (1 pt)

Exercice 1. (9 pts)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + y' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Montrer que $a_0 = y(0)$ et $a_1 = y'(0)$. (1,5 pts)
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$
(4 pts)
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n. (2 pts)
4. Calculer le rayon de convergence de la série obtenue. (1,5 pts)

Exercice 2. (9 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{pour } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. (1 pt)
2. Calculer les coefficients de Fourier de f. (3 pts)
3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf. (1 pt)
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (2 pts)
5. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(2 pts)