CONTRÔLE CONTINU 2

Mercredi 18 novembre 2015
Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (2 pts)

1. Parmi les applications suivantes, déterminer, sans justifier, celles qui sont des formes quadratiques

$$(1)\ \ q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_1(x,y) = x^2 - y^2, \qquad (2)\ \ q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_2(x,y) = x^2 + 2y,$$

$$(3)\ \ q_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_3(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - xy + yz.$$

(1 pt)

2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ? (1 pt)

Exercice 1. (7 pts) On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. (2 pts)
2. Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A. (2 pts)
3. Justifier pourquoi A est diagonalisable. (1 pt)
4. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice inversible P vérifiant $A = PDP^{-1}$. (2 pts)

Exercice 2. (6 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3), \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Calculer la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (1 pt)

2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale. (3 pts)
3. Donner l'expression de q dans la base $\mathcal{B}$. La forme polaire φ_q de q définit-elle un produit scalaire ? (1 pt)
4. Quelle est la signature et quel est le rang de q ? (1 pt)

Exercice 3. (5 pts) On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{(\sqrt{2}+n)^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad\qquad v_n = n^{2015}\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et dans le cas où elles convergent donner leurs limites. (2 pts)
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente. (1 pt)
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ de terme général $w_n = \frac{n^{2015}}{\pi^n}$ est convergente. (1 pt)
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente. (1 pt)

Exercice 4. Bonus (4 pts) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ où $P_0(X) = 1, P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$. On munit E du produit scalaire

$$(P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale. En déduire une base orthonormée. (2 pts)
2. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré au plus 1. Soit $p_F : E \to F$ la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F (par rapport au produit scalaire défini plus haut). Soit $R(X) = X^2 + 2X + 1$. Calculer $p_F(R)$. (2 pts)