CONTRÔLE CONTINU 1

Mercredi 07 octobre 2015

Durée : 1 heure

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et L un endomorphisme de E.

1. Définir ce qu'est un sous-espace vectoriel de E. (1 pt)
2. Définir ce qu'est l'image de L. (1 pt)

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, y + z, x + z).$$

1. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (2 pt)
2. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ? (2 pt)
3. Déterminer une base du noyau de f. En déduire le rang de f. (2 pts)
4. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{CB}}$ de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (2, 3, 3), \vec{u}_3 = (1, 2, 3)$. (1 pt)
5. Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, la matrice $P^{-1} = P_{\mathcal{BC}}$. (3 pts)
6. Déterminer la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$. (3 pts)

Exercice 2. (5 pts) Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = \lambda, \\ x + \lambda y + (\lambda - 2)z = \lambda + 1, \\ x + y + z = 1. \end{array} \right.$$