Exercices sur les systèmes linéaires

Exo1: Résoudre, en appliquant la méthode du pivot de Gauss, ensuite la méthode de Cramer si cela est possible, les systèmes linéaires suivants:

(a) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \\ x+2y=-1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y=0 \\ -2x+y+z=2 \\ -x+y+2z=3. \end{cases}$

Exo2: Discuter selon les valeurs du paramètre réel m, les solutions des systèmes d'équations suivants, en déterminant dans chaque cas une base de l'espace vectoriel des solutions:

(a) $\begin{cases} x+my+z=0 \\ mx+y+mz=0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0. \end{cases}$

Corrigé

Exo1: (a) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En utilisant la méthode de Gauss, en écriture matricielle:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -y=1 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ et $y=-1$.

On ne peut appliquer la méthode de Cramer car le système n'est pas carré.

(b) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Méthode de Gauss, en écriture matricielle:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9/5 & 13/5 \end{array}\right)$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5y + z = 2 \\ \frac{9}{5} z = \frac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y = -2/9 \\ y = \frac{2-z}{5} = \frac{1}{9} \\ z = 13/9 \end{cases}$$

(S) admet une unique solution $\left(\frac{-2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{13}{9}\right)$.

Méthode de Cramer: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 9$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2}{9}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{1}{9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{13}{9}.$$

Exo 21 (a) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant la méthode de Gauss, en écriture matricielle: $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = 0 \\ (1-m^2) y = 0. \end{cases}$

Cas 1: $m \neq \pm 1$. Alors $(S) \Leftrightarrow x = -z$ et $y = 0$.

On prend $z = \alpha$, comme paramètre libre :

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

et donc l'ensemble des solutions est:

$\vec{s} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{s} = \alpha \vec{u}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (-1, 0, 1)$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}\}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions.

<u>Cas 2:</u> $m=1$. Alors $(S) \Leftrightarrow x=-y-z$.

On prend $y=\alpha$, $z=\beta$ comme paramètres :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}, \text{ où } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions :

$\vec{s}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{s}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

et $\vec{u}=(-1,1,0)$, $\vec{v}=(-1,0,1)$.

$\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions.

<u>Cas 3:</u> $m=-1$. Alors $(S) \Leftrightarrow x=y-z$.

On prend $y=\alpha$, $z=\beta$ comme paramètres :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}, \text{ où } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions :

$\vec{s}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{s}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

et $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(-1,0,1)$.

$\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions.

(b) $$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss, en écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2-m^2-m \end{pmatrix}$$

Donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz=0 \\ (m-1)(y-z)=0 \\ (m^2+m-2)\,z=0 \end{cases}$

On a $m^2+m-2=0 \Leftrightarrow m=1$ ou $m=-2$.

<u>Cas 1:</u> $m=1$ $(S) \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-y-z$.

On prend $y=\alpha$ et $z=\beta$ comme paramètres libres:

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$, où $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions est:

$\vec{s}=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{s}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, où $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$\vec{u}=(-1,1,0)$ et $\vec{v}=(-1,0,1)$.

$\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base de l'espace des solutions.

<u>Cas 2:</u> $m=-2$. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$.

On prend $x=\alpha$, comme paramètre libre:

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions est:

$\vec{s}=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{s}=\alpha\vec{u}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

et $\vec{u}=(1,1,1)$.

$\mathcal{B}=\{\vec{u}\}$ est une base de l'espace des solutions.

<u>Cas 3:</u> $m\neq 1$ et $m\neq -2$. Alors $z=0$ et par substitution $x=y=0$. Donc (S) admet une unique solution $(0,0,0)$.