Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2015

I. Suites et séries numériques

I. 1. Suites numériques

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne le *corps* des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le *corps* des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Rappel

- Pour tout nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. On a

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \rho\cos(\theta),\ b = \rho\sin(\theta).$$

- Si x est réel alors la valeur absolue $|x|$ coïncide avec le module de x.

Définition 1

Un suite numérique réelle est une suite de nombres réels

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

et une suite numérique complexe est une suite de nombres complexes

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

Formellement, c'est une application

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \\ n \mapsto u_n, \end{cases}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, selon on considère les suites réelles ou complexes.

- On note par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) la suite.
- On appelle u_n le terme général de la suite (u_n).

Une suite peut être définie de multiples façons :

- en donnant explicitement le terme général u_n en fonction de n : exemples : $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = (1+i)^n$, ...
- par récurrence : exemples : $u_{n+1} = u_n + 3$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$, ...
- par d'autres moyens plus ou moins théoriques ou pratiques : exemples : u_n est la n-ième décimale de π, u_n est la population mondiale en l'année n, ...
- $\cdots$

Remarque

L'espace des suites de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Convergence

Définition 2

Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{K}$. On appelle disque de rayon r et de centre a dans $\mathbb{K}$, l'ensemble

$$D_r(a) = \{x \in \mathbb{K},\ |x - a| \leq r\}.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$, alors

$$D_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r \right\}$$

  ce qui représente dans le plan un *disque* de rayon r et de centre (x_0, y_0).
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_r(a)$ est *l'intervalle* $[a - r, a + r]$.

Définition 3

Soit $a \in \mathbb{K}$. Un sous-ensemble $V \subseteq \mathbb{K}$ est appelé un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $D_r(a) \subseteq V$.

Définition 4

Soient (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout $r > 0$, il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_r$, on ait $u_n \in D_r(a)$.

Définition équivalente

On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout voisinage V de a, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, on ait $u_n \in V$.

Convergence

On dit que (u_n) est convergente s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemples

- $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- $u_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- $u_n = \frac{n}{n+1} + i\frac{2n^2}{n^2+2}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + 2i$.
- $u_n = z^n, z \in \mathbb{C}$, avec $0 \leq |z| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$.

Limite infinie

Définition 5

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \,(n \geq N_M \Rightarrow u_n \geq M).$$

- On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si

$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \,(n \geq N_M \Rightarrow u_n \leq M).$$

Exemples

- $u_n = n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n = -\ln n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

Si (u_n) est une suite complexe, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ n'a pas de sens.

Proposition 1

Soit (z_n) une suite de nombres complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (z_n) est convergente,
2. les suites réelles $(\text{Re}(z_n))$ et $(\text{Im}(z_n))$ sont convergentes.

De plus $\lim_{n\to+\infty} z_n = a + ib$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \text{Re}(z_n) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} \text{Im}(z_n) = b$.

Opération sur les limites

Proposition 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de $\mathbb{K}$, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite (λu_n) est convergente de limite $\lambda \ell_1$,
- la suite $(u_n + v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 + \ell_2$,
- la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 \ell_2$,
- si $\ell_2 \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ pour n assez grand et u_n/v_n est convergente de limite ℓ_1/ℓ_2.

Comparaison des suites réelles

Proposition 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Théorème des gendarmes

Soient (a_n), (b_n) et (u_n) trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} a_n \leq u_n \leq b_n \ \text{ pour } n \text{ assez grand,} \\ (a_n) \text{ et } (b_n) \ \text{ convergent vers une même limite } \ell. \end{cases}$$

Alors (u_n) est convergente de limite ℓ.

Proposition 4

Si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ alors la suite $(|u_n|)$ est convergente de limite $|\ell|$.

Preuve. Conséquence de la propriété

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$

$\square$

Rappel

Si (u_n) est une suite complexe alors $|u_n|$ est le module de u_n et si (u_n) est réelle alors $|u_n|$ est la valeur absolue de u_n.

Suites arithmétiques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite arithmétique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n + r. \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = a + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)a + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est constante}$$

Suites géométriques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite géométrique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = r u_n. \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = a r^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \begin{cases} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \text{ si } r \neq 1, \\ a(n+1) \text{ si } r = 1. \end{cases}$$

$$(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow 0 \leq |r| < 1 \text{ ou } r = 1.$$

Définition 6

Une suite (u_n), réelle ou complexe, est dite bornée si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Définition 7

Une suite réelle (u_n) est dite majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M,$$

et minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n.$$

Propriété

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée. □

Théorème 1

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Suites monotones

Définition 8

On dit qu'une suite réelle (u_n) est croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} \geq u_n,$$

décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} \leq u_n$$

et monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 2

- Une suite réelle croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.
- Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

I. 2. Séries numériques

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On s'intéresse à la somme du nombre infini de termes

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont on voudrait donner un sens et voir si elle est finie ou non. Informellement, c'est ce qu'on appelle une série.

L'idée est de considérer la suite (S_n) définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

et d'étudier sa convergence. Si (S_n) est convergente de limite ℓ, alors

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \ell$$

et on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell.$$

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$, la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- On appelle S_n la la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) si la suite (S_n) converge (resp. diverge).
- Si la série converge, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelée la somme de la série $\sum u_n$.

Exemple : séries géométriques

Soient $z \in \mathbb{C}$ et soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = z^n$, qu'on appelle série géométrique de raison z. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1,\ S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1,\ S_n = n + 1.$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Si elle converge, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$.

Exemple : série harmonique

La série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est appelée la série harmonique.
On a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et donc la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple : séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 1

Une série complexe de terme général u_n est convergente si et seulement si les deux séries réelles de terme général respectif $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$ sont convergentes.

Proposition 2

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Théorème 1 (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve. On a, pour $n \geq 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

et donc comme $\sum u_n$ est convergente, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0.$$

□

Définition 2

On dit d'une série $\sum u_n$ qu'elle est grossièrement divergente si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Remarques

- Pour prouver la divergence de certaines séries, en montre que le terme général u_n ne tend pas vers 0.
  Exemple : la série de terme général $\ln n$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} \ln n \neq 0$.
- La réciproque est fausse en général.
  Exemple : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Convergence absolue

Définition 3

On dit de la série $\sum u_n$ qu'elle est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 2

Une série absolument convergente est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Convergence absolue

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$. On a $|u_n| = 1/n^2$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente et donc convergente.

Définition 4

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série réelle de terme général u_n. On dit que la série est à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite (S_n) est croissante (à partir d'un certain rang)

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc pour prouver que la série $\sum u_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite (S_n) est majorée.

Si $\sum u_n$ est une série quelconque (réelle ou complexe), la série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et donc la convergence de cette dernière implique la convergence de la série initiale $\sum u_n$ (convergence absolue).

Séries à termes positifs : comparaison

Proposition 3

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \leq v_n$, pour n assez grand.

- Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.
- Si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exemples

- On a
$$0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$
et les deux séries $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à **termes positifs**.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et donc la série $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ est convergente.
En particulier, la série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ est convergente puisqu'elle est absolument convergente.
- On a
$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$$
et les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\ln n}$ sont à **termes positifs**.
La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et donc la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergente.

Séries à termes positifs : comparaison

Rappel : équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deus suites. On dit qu'elles sont équivalentes à l'infini et on écrit $u_n \sim_{+\infty} v_n$, s'il existe une suite ϵ_n telle que pour n assez grand $u_n = v_n(1+\epsilon_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1.$$

Théorème 3

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

Exemple

On a

$$\ln(1 + \frac{1}{2^n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et les deux séries $\sum \ln(1 + \frac{1}{2^n})$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont à **termes positifs**.

Comme la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est un série géométrique convergente, on déduit que la série $\sum \ln(1 + \frac{1}{2^n})$ est convergente.

Séries à termes positifs : comparaison

Rappel : négligeabilité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit (u_n) est négligeable devant (v_n) à l'infini et on écrit $u_n = o(v_n)$,s'il existe une suite ϵ_n telle que pour n assez grand $u_n = v_n \epsilon_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} \epsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,

$$u_n = o(v_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n \to +\infty} u_n / v_n = 0.$$

Théorème 4

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.

Séries à termes positifs : comparaison

Exemple

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série (de Riemann) **à termes positifs** convergente.

Donc la série $\sum e^{-n}$ est convergente.

Séries à termes positifs : comparaison

Théorème 5

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante, positive et intégrable sur tout intervalle borné $[0, a]$ où $a > 0$ (par exemple si f est continue). Posons

$$I_n = \int_0^n f(x)\, dx.$$

Alors la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} I_n$ est finie.

Séries à termes positifs : comparaison

Exemple : séries de Riemann

Appliquons ce théorème pour montrer que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ peut se réécrire sous la forme $\sum \frac{1}{(1+n)^\alpha}$. On considère l'application $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^\alpha}$ qui satisfait les conditions du théorème. On a

$$\int_0^n \frac{1}{(1+x)^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{(1+n)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(1+n) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{(1+x)^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Séries à termes positifs : règle de D'Alembert

Théorème (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $u_n > 0$ pour n assez grand. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure, ce qui revient à dire qu'il existe des séries avec $\ell = 1$ et qui sont convergentes et qu'il existe des séries avec $\ell = 1$ et qui sont divergentes.

Séries à termes positifs : règle de D'Alembert

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+1})^n = 1/e < 1$$

et donc la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

Séries à termes positifs : règle de Cauchy

Théorème (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Supposons que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Séries à termes positifs : règle de Cauchy

Preuve.

- Supposons $\ell < 1$. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\ell < \ell + \epsilon < 1$. Pour n assez grand

  $$-\epsilon \leq \sqrt[n]{u_n} - \ell \leq \epsilon, \text{ et donc } u_n \leq (\ell + \epsilon)^n.$$

  Comme la série de terme général $(\ell + \epsilon)^n$ est convergente, on conclut par comparaison que la série $\sum u_n$ est convergente.
- Supposons $\ell > 1$. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $1 + \epsilon < \ell$. Pour n assez grand

  $$-\epsilon \leq \sqrt[n]{u_n} - \ell \leq \epsilon, \text{ et donc } (\ell - \epsilon)^n \leq u_n.$$

  Comme $\ell - \epsilon > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\ell - \epsilon)^n = +\infty$ et par comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et donc la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente. $\square$

Séries à termes positifs : règle de Cauchy

La règle de Cauchy est bien adaptée à l'étude des séries dont le terme général contient des puissances.

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = (\frac{n}{n+1})^{n^2}$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{n+1})^{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} (\frac{n}{n+1})^n = 1/e < 1$$

et donc la série $\sum (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ converge.

Séries alternées

Définition 5

Une série dont le terme général s'écrit, pour n assez grand, sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$, s'appelle une série alternée.

Exemple

La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice

Montrer qu'une série $\sum u_n$ est alternée si et seulement si pour n assez grand $u_n = (-1)^n |u_n|$.

Théorème (Règle des séries alternées)

Soit $\sum(-1)^n v_n$ une série alternée ($v_n \geq 0$). Supposons que

- la suite (v_n) est décroissante,
- $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Alors

- la série $\sum(-1)^n v_n$ est convergente,
- soit S la somme de la série et posons

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

appelé le reste d'ordre n de la série. Alors R_n a le signe de u_{n+1} et

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Exemple

La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.