Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2015

III. Séries entières (suite)

Un exemple d'application

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - y = 0.$$

On connait l'ensemble des solutions

$$y(x) = C\exp(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

On va retrouver l'ensemble des solutions en utilisant les séries entières.

Un exemple d'application

Soit y une solution de (E) et supposons que y est la somme d'une série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

de rayon de convergence $R > 0$.
Par ce qui précède, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Un exemple d'application

En remplaçant dans (E)

$$y'(x) - y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Une réindexation nous donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1) a_{n'+1} x^{n'},$$

et comme n' est une "variable muette"

$$\sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1) a_{n'+1} x^{n'} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Un exemple d'application

On obtient donc

$$y'(x) - y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n = 0,$$

et on déduit

$$(n+1) a_{n+1} - a_n = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Un exemple d'application

Et donc la formule de récurrence

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par récurrence sur n,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

et donc

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = a_0 \exp(x).$$

Développement d'une fonction en série entière

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, où (a_n) est réelle, et S sa somme

$$S : I =]-R, R[\to \mathbb{R}, \;\; S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Nous avons vu que S est indéfiniment dérivable (de classe C^∞) sur I. De plus

$$S(0) = a_0, \; S'(0) = a_1, \; S''(0) = 2a_2,$$

$$S^{(p)}(0) = \sum_{n \geq p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)a_n 0^{n-p} = p! a_p$$

et donc, on peut exprimer a_n en fonction de $S^{(n)}(0)$

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Développement d'une fonction en série entière

Définition 1

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est développable en série entière autour de 0, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, où (a_n) est réelle, de rayon de convergence R non nul et $r \in]0, R[$ vérifiant

$$(1)\ \ ]-r, r[\subseteq I, \qquad (2)\ \ \forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ est appelée le développement en série entière de f autour de 0.

Définition 2

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière autour de x_0 si la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est développable en série entière autour de 0.

Développement d'une fonction en série entière

Conséquence

Si f est développable en série entière autour de 0, alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Et donc, sur un voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Développement d'une fonction en série entière

Conséquence

De même, si f est développable en série entière autour de x_0, alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de x_0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Et donc, sur un voisinage de x_0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

En particulier le développement en série entière est unique.

Remarque

Toute fonction développable en série entière autour de 0 est de classe C^∞ sur un voisinage de 0. Mais la réciproque est fausse. Il existe des fonctions de classe C^∞ sur un voisinage de 0 qui ne sont pas développables en série entière autour de 0.

Exemple : l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en particulier autour de 0, et pour laquelle la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

est la fonction nulle.

Développement d'une fonction en série entière

Définition 3

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0. On appelle série de Taylor-Maclaurin de f autour de x_0, la série

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Remarque

La série de Taylor-Maclaurin n'est pas forcément convergente. Comme signalé plus haut, il peut arriver que sa somme ne coincide pas avec f.

Développement d'une fonction en série entière

Proposition 1 (Condition suffisante)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0.

Supposons que f est de classe C^∞ sur I et qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \ \ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Alors f est développable en série entière autour de x_0 et donc sur un voisinage de x_0, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Développement d'une fonction en série entière

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ avec $J = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq I$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre x_0 et $x \in J$ à l'ordre m. Donc il existe $c_m \in [x_0, x]$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(m+1)}(c_m)}{(m+1)!}(x - x_0)^m.$$

D'où

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right| \leq \frac{M}{(m+1)!}\epsilon^m.$$

Comme le dernier terme tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, on déduit que la série $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ converge uniformément vers f sur J. On vérifie bien que la convergence est normale et donc absolue et par conséquent le rayon de convergence $\geq \epsilon$. $\square$

Exemple 1

Considérons la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. On a

$$f^{(n)}(x) = \exp(x), \quad f^{(n)}(x) \leq \exp(x_0 + \epsilon) \text{ pour tout } x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon].$$

Donc f est développable en série entière autour de x_0 et

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

En variant ϵ, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Développement d'une fonction en série entière

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

Alors f est de classe C^∞ sur I et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

On a pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Exemple 2

Par intégration, on obtient

$$\int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^t (-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}.$$

Donc pour tout $x \in I$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

ce qui est le développement en série entière de $\ln(1+x)$ autour de 0.

Exemple d'applications aux équations différentielles

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' + y = 4\cos(\sqrt{x}).$$

Supposons que (E) admet une solution y développable en série entière $\sum a_n x^n$, autour de 0, de rayon de convergence $R > 0$. On a alors sur $]-R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et en replaçant dans (E)

$$xy'(x) + y(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple d'applications aux équations différentielles

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^n.$$

On a

$$4\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n)!} x^n.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_n - \frac{4(-1)^n}{(2n)!}) x^n = 0$$

et par unicité d'un développement en série entière, on déduit que y est solution de (E) si et seulement si

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple d'applications aux équations différentielles

Donc la solution recherchée est

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^n.$$

En utilisant la règle de D'Alembert, on montre que le rayon de convergence est $R = +\infty$ et donc la solution obtenue est définie sur $\mathbb{R}$.