Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2015

II. Suites et séries de fonctions

II. 1. Suites de fonctions

Une **suite de fonctions** est la donnée d'une suite

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$$

de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

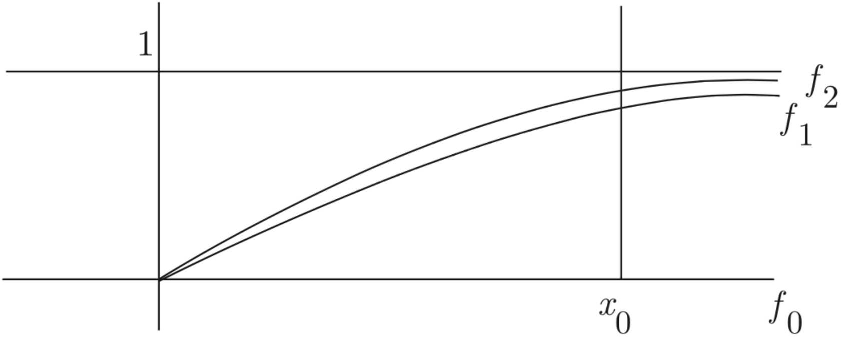
Soit $D \subseteq \mathbb{K}$. Une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$ est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une application $f_n : D \mapsto \mathbb{K}$.

Notation. On notera $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(f_n)_n$ ou (f_n) la suite de fonctions.

Exemple 1

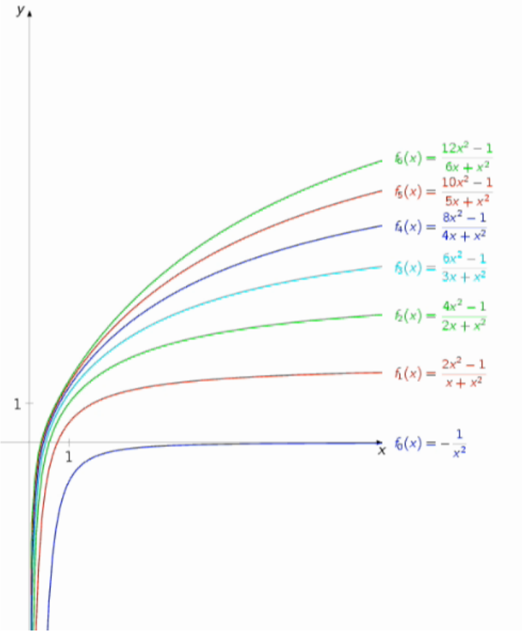
Soit $D = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, on pose

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$



Exemple 2

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{array} \right.$$



y
x
1
1
$f_6(x) = \frac{12x^2 - 1}{6x + x^2}$
$f_5(x) = \frac{10x^2 - 1}{5x + x^2}$
$f_4(x) = \frac{8x^2 - 1}{4x + x^2}$
$f_3(x) = \frac{6x^2 - 1}{3x + x^2}$
$f_2(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + x^2}$
$f_1(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + x^2}$
$f_0(x) = -\frac{1}{x^2}$

Exemple 3

$$f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \cos(nx). \end{cases}$$

Exemple 4

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = x^n. \end{cases}$$

Convergence

Pour les suites de fonctions, on dispose de plusieurs formes de convergence.

On commence par la plus simple ....

Convergence simple

On a vu qu'une suite numérique peut converger (ou non) vers une limite finie ℓ. De la même manière, on peut étudier la converge d'une suite de fonctions et voir si elle peut *s'approcher (converger)* (ou non) d'une fonction "limite".

Soit $x_0 \in D$ fixé. Alors la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique dont on peut étudier la convergence.

Si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors on peut définir une *fonction limite* f par

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} D & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x). \end{array} \right.$$

Convergence simple

Définition 2

Soient $D \subseteq \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que (f_n) converge simplement sur D, si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si (f_n) converge simplement sur D, alors la fonction f définie par

$$f : \begin{cases} D & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \qquad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \end{cases}$$

est appelée la limite simple de la suite (f_n) sur D.

Convergence simple

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

On a :

- pour $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$,
- pour $x = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{cases}$$

On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2nx^2-1}{nx+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n(x^2-\frac{1}{2n})}{n(x+\frac{x^2}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x^2-\frac{1}{2n})}{(x+\frac{x^2}{n})} = 2x^2/x = 2x.$$

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = 2x.$$

Convergence simple

Exemple 4 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \qquad f_n(x) = x^n. \end{cases}$$

- Si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.
- Si $|x| > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $(f_n(x))$ diverge.
- Si $x = -1$, $f_n(x) = (-1)^n$ et donc $(f_n(x))$ n'admet pas de limite.

Donc (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple

Remarque

En général, la convergence simple dépend du domaine de définition D de la suite (f_n).

Dans l'exemple précédent, (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle converge simplement sur l'intervalle $I =]-1, 1]$ et admet comme limite (simple) l'application f définie par

$$f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Convergence uniforme

Supposons que (f_n) est une suite de fonctions définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Donc on suppose qu'il y a déjà une convergence simple.

Dans beaucoup d'applications, on aimerait savoir si une propriété qui est satisfaite pour toutes les fonctions f_n, serait aussi satisfaite par f.
On peut se demander si :

- la continuité de chaque f_n entraîne t-elle la continuité de f ?
- chaque f_n est dérivable, f est-elle dérivable et a-t-on $f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$?
- chaque f_n est intégrable, f est-elle intégrable et a-t-on alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$?

La convergence simple n'est pas suffisante. Il nous faut une notion plus forte, qui est la **convergence uniforme**.

Convergence uniforme

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur D vers la fonction f. On dit que (f_n) converge uniformément sur D vers f si :

- la quantité $u_n = \sup_{x \in D}(|f_n(x) - f(x)|)$ existe et finie pour n assez grand,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.$

Convergence uniforme

En pratique ...

Proposition 1

La suite (f_n) converge uniformément sur D vers f, si et seulement si, il existe une suite réelle (u_n) vérifiant :

- pour n assez grand : $\forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| \leq u_n$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Convergence uniforme

Remarque

Pour montrer la convergence uniforme de (f_n), il faut après avoir trouvé la limite simple f, essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ en fonction seulement de n, indépendamment de x.

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers f qui est définie par

$$f : D = [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

Pour tout $x > 0$, $|f_n(x) - f(x)| = |\dfrac{nx}{1+nx} - 1| = \dfrac{1}{1+nx}$ et $|f_n(0) - f(0)| = 0$.

On a $u_n = \sup\limits_{x \in D} \dfrac{1}{1+nx} = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 1 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $D = [a, +\infty[$ où $a > 0$.

En effet, pour tout $x \in D$,

$$a \leq x \Rightarrow 1 + na \leq 1 + nx \Rightarrow \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na},$$

donc en posant $u_n = \dfrac{1}{1+na}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n,$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{2nx^2 - 1}{nx + x^2}. \end{cases}$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x$. On a $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1 + 2x^3}{nx + x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1 + 2x^3}{nx + x^2} \sim_{+\infty} 2x$$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$.

Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 2 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f, sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.
En effet, on a

$$\frac{1+2a^3}{nb+b^2} \leq \frac{1+2x^3}{nx+x^2} \leq \frac{1+2b^3}{na+a^2},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n = \frac{1+2b^3}{na+a^2}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Convergence et continuité

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est continue sur D, alors f est continue sur D.

Plus précisément, si (f_n) **converge uniformément** sur D vers f et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} \Big(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \Big) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \Big).$$

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

dont la limite simple est $f : D = [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$

Chaque f_n est continue sur D (en particulier en 0), alors que f n'est pas continue en 0.

Convergence et intégrales

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$ et **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f. Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \;\; F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

  la suite (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

En particulier

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt.$$

Convergence et intégrales

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

dont la limite uniforme est $f : D = [a, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1.$
Sur $[a, 1]$ on a

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt = (x - a) - \frac{\ln(1+nx)}{n} + \frac{\ln(1+na)}{n}, \; F(x) = x - a,$$

et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = F$ uniformément.

Convergence et dérivées

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la suite (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

En particulier, si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.

II. 2. Séries de fonctions

De la même manière qu'on avait défini les séries numériques à partir des suites numériques, on définit les **séries de fonctions** à partir des suites de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Donc on s'intéresse à la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Si x est fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite numérique et donc on peut étudier la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle série de fonctions de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la suite de fonctions (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S_n la la somme partielle d'ordre n de la série $\sum f_n$.

Remarque

On a

$$S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x).$$

Convergence simple

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur D.

D'une manière équivalente : la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Notation. Si $\sum f_n$ converge simplement sur D vers la fonction s, on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = s(x).$$

Convergence simple

Exemple 1

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \mapsto \qquad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{3^n}\right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est absolument convergente.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple

Exemple 2 : séries géométriques

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1,\ S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1,\ S_n = n + 1.$$

La série $\sum f_n(z)$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.
Dans ce cas, on peut calculer sa limite simple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D si la suite de fonctions des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur D.

Proposition 1

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur D converge simplement sur D.

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

et donc $\left|S_n(z) - S(z)\right| = \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||}$.

Comme $\displaystyle\lim_{|z| \to 1} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} = +\infty$, la série $\sum f_n(z)$ ne converge pas uniformément sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$. En effet,

$$\left|S_n(z) - S(z)\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

et comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{r^{n+1}}{|1 - r|} = 0$, on déduit la convergence uniforme.

Convergence uniforme et reste partiel

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S. On appelle suite des restes partiels, la suite $(R_n)_n$ de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

R_n est appelé le reste d'ordre n.

Remarque

Remarquons que (R_n) est bien définie et que pour tout $x \in D$,

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

et donc en particulier $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Proposition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur D. Alors elle converge uniformément sur D si et seulement si la suite des restes partiels (R_n) converge uniformément sur D vers la fonction nulle.

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n. C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé, la série numérique $\sum u_n(x)$ de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées : $|u_n(x)|$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Convergence uniforme et reste partiel

Exemple 3

Comme $\sum u_n(x)$ satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On déduit la convergence uniforme de (R_n) vers 0.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Convergence normale

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une application bornée. On note

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

qu'on appelle la norme de la convergence uniforme de f.

Remarquons que si (f_n) est une suite de fonctions, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction f si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur D si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|$ est convergente.

Définition 6

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur D si la série de fonctions $\sum |f_n|$ est simplement convergente sur D.

Convergence normale

Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit convergente.
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, on cherche à minorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit divergente.

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \qquad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{3^n}\right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente, on déduit que la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est normalement convergente.

Liens entre les différentes formes de convergence

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{Convergence absolue} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Convergence normale} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Convergence simple} \\
 & \text{Convergence uniforme} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Liens entre les différentes formes de convergence

Remarque

La convergence uniforme n'entraine pas la convergence absolue.
Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente. En effet,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n}$$

et la série $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente et donc $\sum |f_n|$ n'est pas convergente.

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge normalement, alors $(\|f_n\|)$ converge vers 0.

Comme les séries est un cas particulier des suites de fonctions,...

Théorème 1

Si une séries de fonctions $\sum(f_n)$ **converge uniformément** sur D vers une fonction S et si chaque f_n est continue sur D, alors S est continue sur D.

Plus précisément, si $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers S et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors S est continue en x_0.
On a

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right).$$

Convergence et intégrales

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S. Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \;\; F(x) = \int_a^x S(t)\, dt,$$

  la série $\sum F_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

On a, en particulier

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_a^b f_n(t)\, dt\Big).$$

Convergence et dérivées

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.
Ce qu'on peut formuler

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t).$$

Si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \qquad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}. \end{cases}$$

(1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y-a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?
(2) Soit S la limite de la série. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
(3) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et écrire S' comme la somme d'une série.
(4) Montrer que S est Riemann-Intégrable sur $[1, 2]$ et écrire $\displaystyle\int_1^2 S(x)\, dx$ comme la somme d'une série.

Corrigé

(1) On a

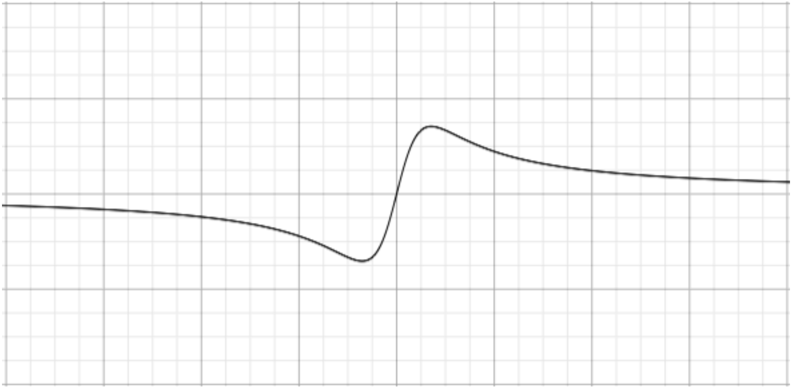
$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}, \quad f_n'(x) = 0 \text{ ssi } x = \pm\frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

$$f_n'(x) \leq 0 \text{ ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ ssi } x \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[$$

Donc

$$f_n \text{ est décroissante sur }]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[,$$

$$\text{et croissante sur } [-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}].$$



Pour n assez grand,

$$[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}] \subseteq [-a, a], \ \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1+n^3a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a.
Sur $\mathbb{R}$, on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{\sqrt{n^3}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. On déduit que la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$ et $0 < a < x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0. La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. En conclu que sa limite S est continue en x_0.

(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de la dérivation des séries, on étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n'$. On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < 0$ ou $0 < a < b$. On a, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3 b)}{(1 + n^3 a^2)^2}, \text{ si } 0 < a < b,$$

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3 |a|)}{(1 + n^3 |b|^2)^2}, \text{ si } a < b < 0.$$

Or

$$\frac{n(1+n^3\alpha)}{(1+n^3\beta^2)^2} \sim \frac{\alpha}{\beta^4 n^2}$$

et donc la série $\sum f_n'$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.
Comme $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ est convergente.
Par conséquent, S est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}.$$

(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1,2]$ et donc S est Riemann-Intégrable sur $[1,2]$. On a

$$\int_1^2 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n^2}\ln\left(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\right),$$

et donc

$$\int_1^2 S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n^2}\ln\left(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\right).$$

III. Séries entières

Définition 1

Une série entière est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

où (a_n) est une suite réelle ou complexe.

Exemple 1

$$\sum_{n\geq 0} z^n, \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n, \ \sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$$

Rayon de convergence

Théorème 1

Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes. Alors il existe un unique réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ possédant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est grossièrement divergente.

De plus

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{ la suite } (|a_n| r^n)_n \text{ est majorée}\}.$$

Remarque

Pour les $z \in \mathbb{C}$, tels que $|z| = R$, on ne peut rien conclure de général sur la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Il faut étudier le cas $|z| = R$ en fonction de la série considérée.

Rayon de convergence

Définition 2

- Le réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini dans le théorème précédent est appelé le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
- Le disque ouvert $\overset{\circ}{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé le disque de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Rayon de convergence

Exemple 2

Considérons la série
$$\sum_{n\geq 0} z^n.$$
Nous avons vu que si $|z| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge et si $|z| > 1$, elle diverge.
Donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ est 1.

Remarquons que pour $|z| = 1$, la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge.

Proposition 2 (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors le rayon de convergence est donné par

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ avec les conventions } \frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Exemple 3

Considérons la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

L'application

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est appelée l'exponentielle complexe et est notée $\exp(z)$ ou e^z.

Rayon de convergence : règle de Cauchy

Proposition 3 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ avec les conventions } \frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Rayon de convergence : règle de Cauchy

Exemple 4

Considérons la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

Propriétés fonctionnelles

Proposition 1

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Pour tout $0 < r < R$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque (fermé) $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.
- Sur $\overset{\circ}{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, en supposant (a_n) réelle, la somme

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

est indéfiniment dérivable et pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

Propriétés fonctionnelles

De même ...

Proposition 2

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R où (a_n) est réelle. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $[a,b] \subseteq]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx.$$