VI. Formes quadratiques, coniques

Mathmatiques 3, 2015

VI. 1. Introduction

Nous avons vu que si $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, alors par définition φ est un produit scalaire et la quantité

$$q(x) = \varphi(x, x) \geq 0$$

est positive. Elle permet de définir des propriétés géométriques comme la distance.

Or dans beaucoup d'applications, on a besoin de formes bilinéaires symétriques qui ne sont pas forcément définies positives.
On s'intéresse alors à l'étude de l'application

$$q : E \to \mathbb{R}, \quad q(x) = \varphi(x, x)$$

qu'on appelle forme quadratique.

VI. 2. Définitions, propriétés

Dans la suite E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$.

Rappel

Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire symétrique** si elle vérifie :

- φ est linéaire à gauche : pour tout $b \in E$ fixé, pour tout $x_1, x_2, x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1 + x_2, b) = \varphi(x_1, b) + \varphi(x_2, b),\ \varphi(\lambda x, b) = \lambda \varphi(x, b)$$

- φ est linéaire à droite : pour tout $a \in E$ fixé, pour tout $y_1, y_2, y \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(a, y_1 + y_2) = \varphi(a, y_1) + \varphi(a, y_2),\ \varphi(a, \lambda y) = \lambda \varphi(a, y)$$

- symétrie : pour tout $x, y \in E$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Définition 1

Une application $q : E \to \mathbb{R}$ s'appelle **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. L'application

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle (x_1, \dots, x_n) | (x_1, \dots, x_n) \rangle$$

  est une forme quadratique.

- (Relativité restreinte) : L'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^4$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique, dont la forme quadratique associée est la *forme de Lorentz* :

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2,$$

  où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique et soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi(x,x)$. Alors

$$q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,y)$$

et donc

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)].$$

Donc si $\varphi' : E^2 \to \mathbb{R}$ est une autre forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi'(x,x)$ alors

$$\varphi'(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \varphi(x,y).$$

Donc si q est une forme quadratique, il existe une **unique** forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$.

Proposition 1 (Caractérisation)

Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si et seulement si elle vérifie :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. L'application

$$\varphi_q : E \times E \to \mathbb{R},\ \ (x, y) \mapsto \varphi_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

   est une forme bilinéaire symétrique.

La forme φ_q s'appelle la **forme polaire** de q.

Preuve : Supposons que q est une forme quadratique et φ est une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$.

(1) $q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x, x) = \lambda^2 q(x)$.

(2) On a

$$q(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(y, y) + 2\varphi(x, y)$$

d'où : $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] = \varphi_q(x, y)$ et $\varphi = \varphi_q$. Donc φ_q est une forme bilinéaire symétrique.

Réciproque : on a

$$\varphi_q(x, x) = \frac{1}{2}[q(2x) - 2q(x)] = \frac{1}{2}[4q(x) - 2q(x)] = q(x)$$

et donc q est une forme quadratique. □

Remarques

- Donc si q est une forme quadratique, il existe une **unique** forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$, qui est la forme polaire $\varphi_{\boldsymbol{q}}$.
- Réciproquement : pour tout forme bilinéaire symétrique φ, il existe une unique forme quadratique q_φ, qui lui est associée, définie par $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.
- L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même l'ensemble $\mathcal{BS}(E)$ des formes bilénaires symétriques est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application

$$\mathcal{Q}(E) \to \mathcal{BS}(E), \;\; q \mapsto \varphi_{\boldsymbol{q}}$$

est un isomorphisme dont l'inverse est

$$\mathcal{BS}(E) \to \mathcal{Q}(E), \;\; \varphi \mapsto q_\varphi.$$

Exemple

Soit

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Alors q est une forme quadratique et la forme polaire est

$$\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{1}{2}[q(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - q(x_1, x_2) - q(y_1, y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 - y_2^2]$$

$$= \frac{1}{2}[2x_1 y_1 + 2x_2 y_2] = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

On retrouve le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

VI. 3. Écriture matricielle, expression analytique

Écriture matricielle

Définition 2

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tous $x, y \in E$, dont les écritures dans la base $\mathcal{B}$,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \;\; y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n,$$

on a

$$\varphi(x, y) = \varphi(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_j.$$

La matrice $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ s'appelle la **matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$** et est notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1.$$

On a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\varphi(x,y) = {}^tX\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)Y = {}^tY\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)X$$

où X (resp. Y) est la matrice-colonne des coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_1)x_i & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_n)x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_1)x_i)y_1 + \cdots + (\sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_n)x_i)y_n$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(e_i,e_j)x_iy_j$$

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1.$$

On a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2)y_1 + (x_1 + 3x_2)y_2 = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1.$$

Propriétés

- φ est symétrique $\Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique.
- Si $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. symétrique) alors l'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ (x, y) \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i y_j$$

est une forme bilinéaire (resp. symétrique).

Définition 3

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_q)$ de la forme polaire φ_q s'appelle la **matrice de** q, par rapport à la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice symétrique et est notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2$. On a

$$\varphi_q(e_1, e_1) = q(e_1) = 1,\ \varphi_q(e_1, e_2) = \frac{1}{2}[q(e_1 + e_2) - q(e_1) - q(e_2)] = 3/2$$

$$\varphi_q(e_2, e_1) = \varphi_q(e_1, e_2) = 3/2,\ \varphi_q(e_2, e_2) = q(e_2) = 2$$

et donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Montrer que toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ et que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Remarque

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$q(x) = \varphi_q(x, x) = {}^t X \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) X$$

où X est la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 2 (Changement de base)

Soient $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)P.$$
$\square$

Expression analytique

Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, dont l'écriture dans la base $\mathcal{B}$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

on a

$$q(x) = \varphi_q(x, x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi_q(e_i, e_j) x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_q(e_i, e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_q(e_i, e_j) x_i x_j.$$

La dernière expression est appelée **l'expression analytique** de q dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de la forme

$$ax^2 + cy^2 + 2bxy$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. C'est l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$.

Règle de dédoublement des indices

Si

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j$$

est l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$, pour retrouver la forme polaire φ_q on procède comme suit :

- on remplace les termes x_i^2 par $x_i y_i$,
- on remplace les termes $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$.

Exemple

Soient $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. On applique la règle de dédoublement des indices :

$$\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2[\frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2)]$$

et donc

$$\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2.$$

Rang et noyau

Définition 4

Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- On appelle **rang de** q le rang de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$.
- On appelle **noyau** de q, le sous-espace vectoriel

$$\ker q = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi_q(x, y) = 0\}.$$

Définition

On dit que q est :

- **non-dégénérée** si $\ker q = 0$,
- **positive** si $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$, i.e. si φ_q est positive,
- **définie-positive** si q est positive et $\forall x \in E$ $(q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$, i.e. si φ_q est définie-positive.

Proposition 3

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors q est non-dégénérée si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est inversible dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E. $\square$

VI. 4. Bases q-orthogonales

Bases q-orthogonales

Définition 5

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

- Deux éléments $x, y \in E$ sont dit φ-**orthogonaux** si $\varphi(x, y) = 0$.
- On dit d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ qu'elle est φ-**orthogonale** si e_i et e_j sont φ-orthogonaux pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

- Deux éléments $x, y \in E$ sont dit q-**orthogonaux** s'ils sont φ_q-orthogonaux.
- On dit d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ qu'elle est q-**orthogonale** si e_i et e_j sont q-orthogonaux pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Proposition 4

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Une base $\mathcal{B}$ est q-orthogonale si et seulement si la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale.

Preuve. Si $\mathcal{B}$ est q-orthogonale alors $\varphi_q(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et donc la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \varphi_q(e_1, e_1) & \cdots & \varphi_q(e_1, e_n) = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_q(e_n, e_1) = 0 & \cdots & \varphi_q(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

est diagonale. Réciproquement, si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale, alors le coefficient a_{ij} est nul pour $i \neq j$ et comme $a_{ij} = \varphi_q(e_i, e_j)$ en déduit que e_i et e_j sont q-orthogonaux (pour $i \neq j$) et donc $\mathcal{B}$ est q-orthogonale. $\square$

Importance des bases q-orthogonales

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base q-orthogonale. Pour tout $x \in E$, dont l'écriture dans la base $\mathcal{B}$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

on a

$$q(x) = \varphi_q(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_q(e_i, e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_q(e_i, e_j) x_i x_j$$

$$= q(e_1) x_1^2 + \cdots + q(e_n) x_n^2$$

et donc l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$ est plus simple.

Proposition 5 (Importance des bases q-orthogonales)

Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base q-orthogonale. Soit

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

l'expression analytique de q dans $\mathcal{B}$.

- q est non-dégénérée si et seulement si pour tout i, $\lambda_i \neq 0$.
- q est positive si et seulement si pour tout i, $\lambda_i \geq 0$.
- q est définie-positive si et seulement si pour tout i, $\lambda_i > 0$.

$\square$

Recherche d'une base q-orthogonale

Définition 6

1. Une application $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire s'appelle une **forme linéaire**.
2. L'espace des formes linéaires s'appelle le **dual** de E et est noté E^*.

Proposition 6

L'espace dual E^* est un espace vectoriel réel de dimension n (Rappel : $\dim(E) = n$). Plus précisément, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ où e_i^* est définie par

$$e_i^* : E \to \mathbb{R}, \quad e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

constitue une base de E^*.

Théorème 1 (Méthode de réduction de Gauss)

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non-nulle. Alors il existe des formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_p$ linéairement indépendantes (dans E^* et donc $p \leq n$) et des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}^*$ vérifiant :

1. $q(x) = \alpha_1 \ell_1(x)^2 + \cdots + \alpha_p \ell_p(x)^2$, pour tout $x \in E$.
2. $\ker q = \{x \in E \mid \ell_1(x) = \cdots = \ell_p(x) = 0\}$ et $rg(q) = p$.
3. Soit $\mathcal{B}' = (\ell_1, \cdots, \ell_p, \ell_{p+1}, \cdots, \ell_n)$ une base de E^* complétant la famille libre $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $\ell_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ l'écriture canonique de ℓ_i dans la base $\mathcal{B}$. Soit
$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Alors P est inversible et les vecteurs colonnes de la **matrice inverse** P^{-1} constitue une base q-orthogonale de E.

Exemple 1 : forme quadratique avec carrés

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et considérons la forme quadratique q définie par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2yz.$$

On commence par regrouper tous les termes où x figure :

$$q(x, y, z) = (2x^2 + 2xy) + y^2 + 2yz.$$

On utilise ensuite l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour avoir un terme de la forme $(\ell_1(x, y, z))^2$:

$$2x^2 + 2xy = 2(x^2 + xy) = 2(x^2 + 2x(\frac{y}{2}) + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4})$$

$$= 2((x + \frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{4}) = 2(x + \frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{2}.$$

On a :

$$q(x,y,z) = 2(x+\frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{2} + y^2 + 2yz = 2(x+\frac{y}{2})^2 + \frac{y^2}{2} + 2yz$$

On regroupe ensuite tous les termes qui restent où y figure (et ainsi de suite). On a

$$\frac{y^2}{2} + 2yz = (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 + 2(\frac{y}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}z) + (\sqrt{2}z)^2 - (\sqrt{2}z)^2$$

$$= (\frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z)^2 - 2z^2.$$

D'où

$$q(x,y,z) = 2(x+\frac{y}{2})^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z)^2 - 2z^2$$

On a

$$\ell_1(x,y,z) = x + \frac{y}{2}, \;\; \ell_2(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z, \;\; \ell_3(x,y,z) = z.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calcul

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la famille $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ où

$$f_1 = (1, 0, 0),\ f_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 0),\ f_3 = (1, -2, 1)$$

est une base q-orthogonale.

Exercice

Vérifier que $\mathcal{C}$ est bien une base q-orthogonale.

Exemple 2 : forme quadratique sans carrés

Soit $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et considérons la forme quadratique q définie par

$$q(x, y, z, t) = xy + xz + 2yz + zt.$$

On commence par regrouper les termes où x et y apparaissent, les termes où seulement x apparait et les termes où seulement y apparait. On a

$$q(x, y, z, t) = xy + xA(z, t) + yB(z, t) + zt,$$

où $A(z, t) = z$ et $B(z, t) = 2z$ dans notre cas.
On a

$$xy + xA(z, t) + yB(z, t) = x(y + A(z, t)) + yB(z, t)$$

$$= x(y + A(z, t)) + yB(z, t) + A(z, t)B(z, t) - A(z, t)B(z, t)$$
$$= (x + B(z, t))(y + A(z, t)) - A(z, t)B(z, t)$$

On utilise ensuite l'identité $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$ pour obtenir

$$xy + xA(z,t) + yB(z,t) =$$

$$\frac{1}{4}[(x+A(z,t)+y+B(z,t))^2 - (x+A(z,t)-y-B(z,t))^2] - A(z,t)B(z,t),$$

ce qui donne dans notre cas

$$xy + xz + 2yz = \frac{1}{4}[(x+y+3z)^2 - (x-y-z)^2] - 2z^2$$

et

$$q(x,y,z,t) = \frac{1}{4}[(x+y+3z)^2 - (x-y-z)^2] - 2z^2 + zt.$$

L'application $(z,t) \mapsto -2z^2 + zt$ est une forme quadratique ayant moins de variable que q et on réapplique la même méthode.

On a

$$-2z^2 + zt = -2(z^2 + \frac{1}{2}zt) = -2(z^2 + 2z(\frac{t}{4}) + (\frac{t}{4})^2 - (\frac{t}{4})^2)$$

$$= -2((z + \frac{t}{4})^2 - \frac{t^2}{16}) = -2(z + \frac{t}{4})^2 + \frac{t^2}{8}.$$

D'où

$$q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}[(x + y + 3z)^2 - (x - y - z)^2] - 2(z + \frac{t}{4})^2 + \frac{t^2}{8}.$$

Donc on prend

$$\ell_1(x, y, z, t) = x + y + 3z, \;\; \ell_2(x, y, z, t) = x - y - z,$$

$$\ell_3(x, y, z, t) = z + \frac{t}{4}, \;\; \ell_4(x, y, z, t) = t.$$

Corollaire 1 (Existence des bases q-orthogonales)

Pour toute forme quadratique q, E admet des bases q-orthogonales. $\square$

Signature d'une forme quadratique

Théorème 2 (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, q-orthogonale et des entiers r et s vérifiants :

1. $0 \leq r \leq r + s \leq n$,
2. $q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$,
3. $rg(q) = r + s$,
4. pour toute base q-orthogonale $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$, r est le nombre des vecteurs f_i tels que $q(f_i) > 0$ et s est le nombre de vecteurs f_i tels que $q(f_i) < 0$.

Définition

Le couple (r, s) ne dépendent que de q et s'appelle la **signature** de q.

Diagonalisation simultanée

Proposition 7

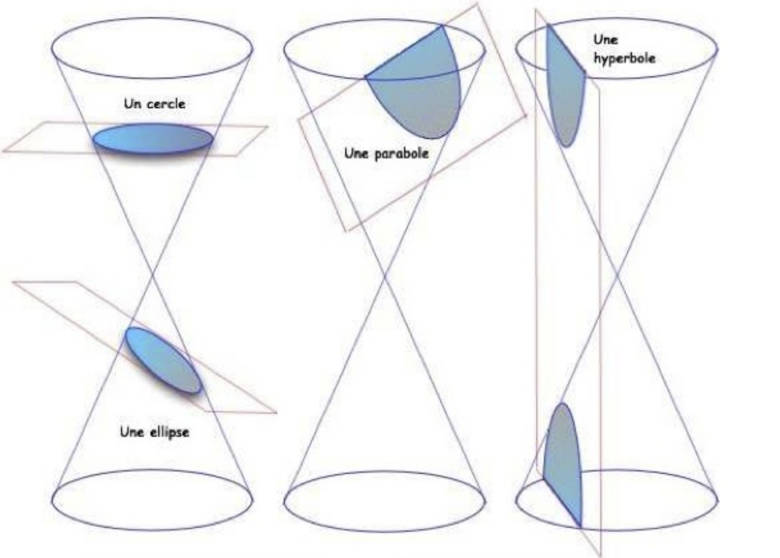
Supposons que E est euclidien et soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors il existe une base de E qui est à la fois orthonormée et q-orthogonale.

Preuve. La matrice de q est symétrique et est donc diagonalisable dans une base orthonormée qui va être aussi q-orthogonale grâce à la Proposition 4. $\square$

VI. 5. Coniques

VI. 5. 1. Quelques rappels

Origine



On muni $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. On considère $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où O est le point d'origine.

Définition monofocale

On considère

- une droite $\mathcal{D}$,
- un point F non situé sur $\mathcal{D}$,
- un réel strictement positif e.

On appelle conique (propre) de droite directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant :

$$d(M,F) = e \cdot d(M,\mathcal{D})$$

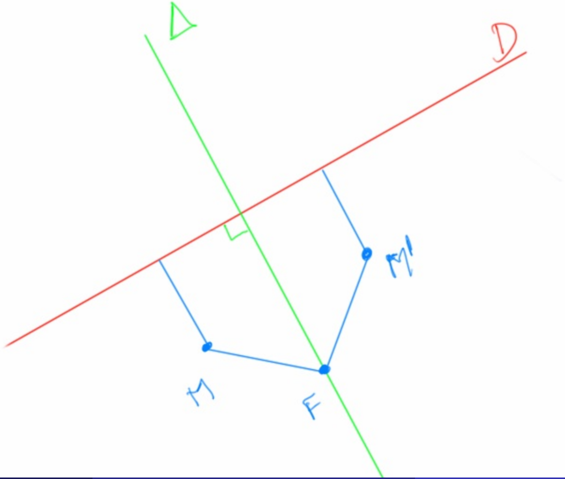
où $d(M,F)$ désigne la distance du point M au point F et $d(M,\mathcal{D})$ désigne la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$.

Définition

- Si $e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse
- Si $e = 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une parabole
- Si $e > 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole

Définition

La droite Δ passant par F et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est un axe de symétrie appelé l'axe focal de la conique.

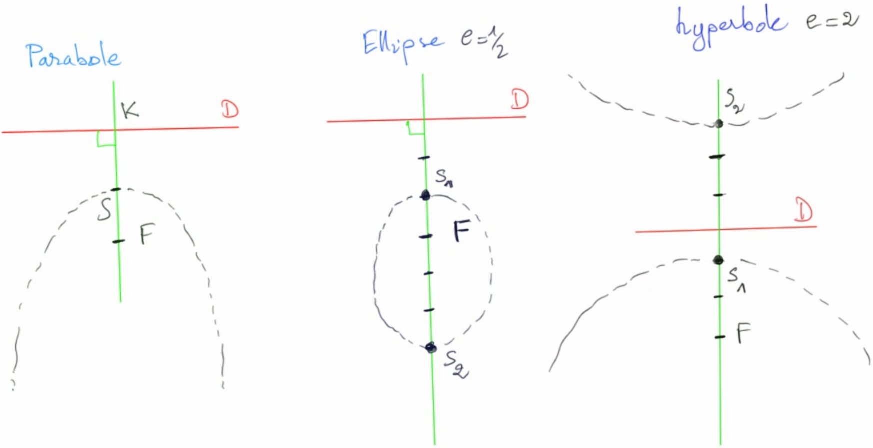


Définition

On appelle sommet de la conique tout point de la conique qui est également sur l'axe focal.

Soit K la projection de F sur la droite $\mathcal{D}$.

- Une parabole admet un unique sommet S : c'est le milieu du segment $[FK]$.
- Une ellipse ou une hyperbole admet deux sommets : S_1 le barycentre des deux points : F avec le poids 1 et K avec le poids e ; S_2 le barycentre des deux points : F avec le poids 1 et K avec le poids $-e$.


Parabole
K
D
S
F
Ellipse e=1/2
D
S1
F
S2
hyperbole e=2
S2
D
S1
F

Propriété (parabole)

Soit $\mathcal{C}$ une parabole. Dans un repère orthonormé $(S, \vec{u}, \vec{v})$ où

- S est le sommet de la parobole,
- $\vec{u} = \frac{\vec{SF}}{\|\vec{SF}\|}$

la parabole $\mathcal{C}$ a comme équation

$$y^2 = 2px.$$

où $p = d(F, \mathcal{D})$.

Réciproquement, dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ toute courbe d'équation $y^2 = 2px$ où $p \geq 0$, est une parabole de sommet O et de Foyer le point $F = (p/2, 0)$ et de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -p/2$.

Propriété (ellipse ou hyperbole)

Soit $\mathcal{C}$ une conique d'excentricité $e \neq 1$ ($\mathcal{C}$ est une ellipse ou une hyperbole). Soit O le milieu du segment $[S_1 S_2]$ où S_1 et S_2 sont les sommets de $\mathcal{C}$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{\vec{OF}}{\|\vec{OF}\|}$ la conique $\mathcal{C}$ a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

où $a = d(O, S_1)$ et $c = d(O, F)$.

- On a $a^2 - c^2 > 0$ si et seulement si $e < 1$. Dans ce cas $\mathcal{C}$ est une ellipse. En posant $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $\mathcal{C}$ a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- On a $a^2 - c^2 < 0$ si et seulement si $e > 1$. Dans ce cas $\mathcal{C}$ est une hyperbole. En posant $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $\mathcal{C}$ a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Réciproquement ...

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, une courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$ est une ellipse

- de foyer $F = (c, 0)$ où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
- d'excentricité $e = \frac{c}{a}$
- de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = \frac{a^2}{c}$
- de sommets $S_1 = (a, 0)$, $S_2 = (-a, 0)$

De même ...

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, une courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole

- de foyer $F = (c, 0)$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- d'excentricité $e = \frac{c}{a}$
- de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = \frac{a^2}{c}$
- de sommets $S_1 = (a, 0)$, $S_2 = (-a, 0)$

VI. 5. 2. Utilisation des formes quadratiques

Définition algébrique

On appelle **conique** toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ admettant dans le repère $\mathcal{R}$ une équation de la forme $F(x, y) = 0$ où

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On cherche un repère adapté dans lequel la conique $\mathcal{C}$ admet une "équation réduite" qui soit aussi simple que possible.

Les termes de degré 2 de F définissent une forme quadratique

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \ (x, y) \mapsto q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

appelée la **partie quadratique** (ou la forme quadratique associée à F) de l'équation F de la conique $\mathcal{C}$.

Nous allons utiliser les propriétés de la forme quadratique q pour trouver la bonne base dans laquelle l'équation de $\mathcal{C}$ est plus simple.

La matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ de q dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \varphi_q(\vec{i}, \vec{i}) & \varphi_q(\vec{i}, \vec{j}) \\ \varphi_q(\vec{j}, \vec{i}) & \varphi_q(\vec{j}, \vec{j}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

où φ_q est la forme polaire de q.

La matrice A étant symétrique, elle se diagonalise dans une base orthonormée et en particulier q-orthogonale.

Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée (ou q-orthogonale) de vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de A avec pour valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

Il existe alors une matrice (orthogonale) P, à savoir la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, tels que

$$A = PD\,{}^tP, \quad \text{où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathcal{B}'$ est une base q-orthogonale, on a

$$q(\vec{u}) = \lambda_1,\ q(\vec{v}) = \lambda_2,\ \ q(x'\vec{u} + y'\vec{v}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

et donc

$$q(x\vec{i} + y\vec{j}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

ce qui donne une forme plus simple de q.

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

et en exprimant le terme $dx + ey + f$ en fonction de x' et y', on conclut que l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}')$ s'écrit sous la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \alpha x' + \beta y' + k = 0$$

où $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$.

Donc considérons une base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ orthonormée de vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de A avec pour valeurs propres λ_1 et λ_2 et dans laquelle l'équation de la conique $\mathcal{C}$ est de de la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \alpha x' + \beta y' + k = 0 \tag{1}$$

où $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$. On étudie $\mathcal{C}$ selon les cas suivants.

Premier cas : $\det(A) = ac - \frac{b^2}{4} = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

On réécrit l'équation (1) sous une forme plus simple en utilisant l'identité $(z+t)^2 = z^2 + 2zt + t^2$,

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \alpha x' + \beta y' + k$$

$$= \lambda_1 x'^2 + \lambda_1 2x' \frac{\alpha}{2\lambda_1} + \lambda_2 y'^2 + \lambda_2 2y' \frac{\beta}{2\lambda_2} + k$$

$$= \lambda_1 (x' + \frac{\alpha}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y' + \frac{\beta}{2\lambda_2})^2 + (k - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1} - \frac{\beta^2}{4\lambda_2})$$

et donc on obtient une équation de la forme

$$\lambda_1 (x' - \alpha')^2 + \lambda_2 (y' - \beta')^2 + k' = 0 \qquad (2)$$

où

$$\alpha' = \frac{-\alpha}{2\lambda_1},\ \beta' = \frac{-\beta}{2\lambda_2},\ k' = k - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1} - \frac{\beta^2}{4\lambda_2}.$$

(1) Cas $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Donc λ_1 et λ_2 ont le même signe.

- Si $k' = 0$ alors $\mathcal{C}$ est réduite au point $\omega = (\alpha', \beta')$.
- Si k' est du signe de λ_1 et λ_2, alors $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide.
- Si k' est du signe opposé à λ_1 et λ_2, $\mathcal{C}$ est une **ellipse** (de centre de symétrie $\omega = (\alpha', \beta')$).

(2) Cas $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Donc λ_1 et λ_2 sont de signes oposés.

- Si $k' = 0$ alors l'équation (2) s'écrit

$$\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}(x' - \alpha')^2 = (y' - \beta')^2$$

  et donc $\mathcal{C}$ est la réunion des deux droites sécantes d'équations

$$\lambda(x' - \alpha') = (y' - \beta'), \ \ \lambda(x' - \alpha') = -(y' - \beta').$$

  où $\lambda = \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}$.
- Si $k' \neq 0$ alors $\mathcal{C}$ est une **hyperbole**.

Deuxième cas : $\det(A) = ac - \frac{b^2}{4} = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Dans ce cas, l'une des valeurs propres est nulle et seulement une car $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et donc $A \neq 0$.
Si $\lambda_1 = 0$, l'équation (1) s'écrit

$$\lambda_2(y' - \beta')^2 + \alpha x' + k' = 0 \tag{3}$$

$$\text{où } \beta' = \frac{-\beta}{2\lambda_2} \text{ et } k' = k - \frac{\beta^2}{4\lambda_2},$$

et si $\lambda_2 = 0$ l'équation (1) s'écrit

$$\lambda_1(x' - \alpha')^2 + \beta y' + k' = 0, \text{ où } \alpha' = \frac{-\alpha}{2\lambda_1} \text{ et } k' = k - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1}.$$

On va seulement traiter le cas $\lambda_1 = 0$, le cas $\lambda_2 = 0$ se traite de façon similaire.

- Si $\alpha = 0$ alors l'équation (3) est de la forme

$$\lambda_2(y' - \beta')^2 + k' = 0$$

  et donc $\mathcal{C}$ est, selon les valeurs de $\frac{-k'}{\lambda_2}$, la réunion de deux droites parallèles (si $\frac{-k'}{\lambda_2} > 0$), une seule droite (si $k' = 0$) ou l'ensemble vide (si $\frac{-k'}{\lambda_2} < 0$).
- Si $\alpha \neq 0$ alors l'équation (3) est de la forme

$$x' = \frac{-\lambda_2}{\alpha}(y' - \beta')^2 - \frac{k'}{\alpha}$$

  et donc $\mathcal{C}$ est une **parabole**.

Conclusion. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

et posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$ alors $\mathcal{C}$ est une conique de *type ellipse* : $\mathcal{C}$ est une ellipse (une conique propre), un point ou l'ensemble vide (une conique dégénérée).
- Si $\Delta > 0$ alors $\mathcal{C}$ est une conique de *type hyperbole* : $\mathcal{C}$ est une hyperbole (une conique propre) ou la réunion de deux droites sécantes (une conique dégénérée).
- Si $\Delta = 0$ alors $\mathcal{C}$ est une conique de *type parabole* : $\mathcal{C}$ est une parabole (une conique propre), la réunion de deux droites parallèles, une droite ou l'ensemble vide (une conique dégénérée).