# Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2015

## V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

# V. 1. Introduction

Nous avons vu que dans un espace vectoriel nous pouvons additionner des vecteurs et les multiplier par des scalaires.

Pouvons-nous aller plus et définir des notions comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité ?

Le produit scalaire est une opération algébrique qui s'ajoute aux lois s'appliquants aux vecteurs et qui permet donc d'utiliser les notions usuelles de la géométrie euclidienne traditionnelle en dimension deux ou trois, comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité.

Il permet d'étendre ces notions à des espaces vectoriels réels de toute dimension, et aux espaces vectoriels complexes.

Nous distinguerons le cas réel et le cas complexe pour définir le produit scalaire.

# V. 2. Produit scalaire

## V. 2. 1. Produit scalaire réel

## Définition

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée forme bilinéaire si :

- $\varphi$ est linéaire à droite : pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est linéaire.
- $\varphi$ est linéaire à gauche : pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.

## Exemple

En prenant $E = \mathbb{R}$ l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = xy$$

est une forme bilinéaire sur $E$. En effet :

- $\varphi$ est linéaire à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = ay$ est évidement linéaire.
- $\varphi$ est linéaire à gauche : pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est évidement linéaire.

On remarque par contre que $\varphi$ elle-même n'est pas linéaire (exercice).

## Définition

Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est

- symétrique si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$.
- positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- définie positive si elle est positive et si pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

est une forme bilinéaire (exercice) symétrique et définie positive. En effet :

- $\varphi$ est symétrique : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

  et donc $\varphi$ est symétrique.
- $\varphi$ est définie positive : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

  et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

## Définition

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme bilinéaire sur $E$ qui est symétrique et définie positive.

- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien.

## Notation

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

### Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

## Exemple

Soit $E$ le $\mathbb{R}$-e.v des applications continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$E \times E \to \mathbb{R},\ (f, g) \to \langle f|g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

est un produit scalaire (exercice).

## V. 2. 3. Produit scalaire complexe

## Définition

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée forme sesquilinéaire sur $E$ si :

- pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.
- pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est semi-linéaire :

$$\varphi(a, y_1 + y_2) = \varphi(a, y_1) + \varphi(a, y_2), \text{ pour tout } y_1, y_2 \in E$$

$$\varphi(a, \lambda y) = \bar{\lambda}\varphi(a, y), \text{ pour tout y } \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

## Exemple

En prenant $E = \mathbb{C}$ l'application

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = x\overline{y}$$

est une forme sesquilinéaire sur $E$. En effet :

- pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est évidement linéaire.
- pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = a\overline{y}$ est semi-linéaire. Elle vérifie

$$\varphi_a(y_1 + y_2) = a(\overline{y_1 + y_2}) = a\overline{y_1} + a\overline{y_2} = \varphi_a(y_1) + \varphi_a(y_2)$$

$$\varphi_a(\lambda y) = a\overline{\lambda y} = a\overline{\lambda}\overline{y} = \overline{\lambda}\varphi_a(y).$$

## Définition

Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est

- hermitienne si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$, pour tout $x, y \in E$.
- positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- définie positive si elle est positive et si pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

## Exemple

Dans $\mathbb{C}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

est une forme sesquilinéaire (exercice) hermitienne et définie positive. En effet :

- $\varphi$ est hermitienne : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}} = \overline{\varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))}$$

  et donc $\varphi$ est hermitienne.
- $\varphi$ est définie positive : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$$

  et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$.

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme sesquilinéaire sur $E$ qui est hermitienne et définie positive.

- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace hermitien.

**Notation**

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

## Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$

Dans $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

## V. 2. 4. Quelques propriétés

**Rappel**

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

## Définition

Si $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $E$ alors pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geq 0$.

- On pose alors $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ qu'on appelle la norme de $x$.
- Pour tous $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$ qu'on appelle la distance entre $x$ et $y$.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, x_2)|(y_1, y_2)\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

on retombe sur la notion usuelle de distance

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\langle (x_1 - y_1, x_2 - y_2)|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\rangle}$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

## Proposition

Soit $E$ un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire),
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(\langle x|y \rangle) + \|y\|^2$.

## Proposition (Identité du parallélogramme)

Dans tout espace préhilbertien $E$ on a pour tous $x, y \in E$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés).

## Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $E$ un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\| \langle x | y \rangle \| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont linéairement dépendants.

Soient $u$ et $v$ deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien $E$. On sait d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left|\frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right| \leq 1$$

On peut donc trouver un unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

### Définition

Cet unique angle est appelé l'angle non orienté entre $u$ et $v$.

## V. 3. Orthogonalité

## Définition

Soit $E$ un espace préhilbertien.

- On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$. On écrit $x \perp y$.
- Deux parties $A$ et $B$ de $E$ sont dites orthogonales si pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, $a$ et $b$ sont orthogonaux. On écrit $A \perp B$.

## Remarque

Remarquons que deux vecteurs $u$ et $v$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si l'angle non orienté formé entre $u$ et $v$ est $\pi/2$.

## Définition

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien $E$. On dit que $\mathcal{C}$ est orthogonale si $u_i \perp u_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ avec $i \neq j$.

## Théorème de Pythagore

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs d'un espace préhilbertien $E$. Alors

$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} u_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2.$$

### Proposition

Toute famille de vecteurs, ne contenant pas de vecteurs nuls, orthogonale est libre.

## V. 4. Projection orthogonale

### Proposition

Soit $A$ une partie non vide de $E$. L'ensemble des vecteurs de $E$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de $A$, noté $A^{\perp}$

$$A^{\perp} = \{x \in E | x \perp y \text{ pour tout } y \in A\}$$

est un s.e.v de $E$ appelé l'orthogonal de $A$.

### Proposition

Pour tout s.e.v $F$ de dimension finie de $E$ on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

## Théorème (projection orthogonale)

Soit $F$ un s.e.v de dimension finie de $E$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur $y$ dans $F$ tel que :

$$\|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

C'est l'unique vecteur appartenant à $F$ vérifiant $x - y \in F^{\perp}$.

Pour $x \in E$, le vecteur $y$ de $F$ fourni par le théorème précédent peut être vu comme la meilleure approximation de $x$ dans $F$.

On dit que $y$ est la projection orthogonale de $x$ sur $F$. On note $y = p_F(x)$.

On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et

$$x = p_F(x) + (x - P_F(x))$$

avec $p_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.

## V. 4. Bases orthonormées, orthonormalisation

**Définition**

On dit d'un vecteur $x \in E$ qu'il est unitaire si $\|x\| = 1$.

**Définition**

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que $\mathcal{C}$ est orthonormée si $\mathcal{C}$ est orthogonale et si $u_i$ est unitaire pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

## Définition

Une base de $E$ qui forme une famille orthonormée est appelée base orthonormée.

Autrement dit : une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ est une base orthonormée si

- $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ pour tout $i, j$ avec $i \neq j$.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

la base canonique $Can = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée. Il faut vérifier (exercice)

- $\|e_i\| = 1$,
- $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ pour tout $i, j$ avec $i \neq j$.

## Proposition (Lecture des composantes dans une base orthonormée)

Soit $E$ un espace euclidien ou hermitien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Alors pour tout $x \in E$, on a

$$x = \langle x|e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle x|e_n\rangle\, e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = |\langle x|e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle x|e_n\rangle|^2.$$

Donc

$$x = \begin{pmatrix} \langle x|e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n\rangle \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

## Proposition

Soit $F$ un s.e.v. de dimension finie de $E$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de $F$. Alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de $x$ sur $F$ est donnée par

$$P_F(x) = \langle x|e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle x|e_p\rangle\, e_p.$$

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, calculons la projection orthogonale de $u = (2, 1, 1)$ sur la droite vectorielle $F = Vect((1, 1, 0))$.

- base orthonormée de $F$ : $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$ et donc en posant $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ on obtient une base orthonormée de $F$
- On a

$$p_F(u) = \langle u|v\rangle\, v = (\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0).$$

## Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $E$ un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Alors il existe une base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $E$, orthonormée et vérifiant $Vect(f_1, \ldots, f_j) = Vect(e_1, \ldots, e_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

On construit les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ par récurrence, selon un procédé appelé le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, comme suit :

1. On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
2. Supposons que la famille $(f_1, \ldots, f_j)$ est construite, $1 \leq j \leq n-1$, on définit alors $f_{j+1}$ par

$$f_{j+1} = \frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k}{\left\| e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k \right\|}.$$

## Remarque

Remarquons que le vecteur

$$\sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k$$

est la projection orthogonale de $e_{j+1}$ sur l'espace vectoriel engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_j$. Par conséquent, le vecteur

$$e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k$$

est orthogonal à l'espace vectoriel engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_j$. Pour le rendre unitaire il suffit de le diviser par sa norme

$$\frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k}{\left\| e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k \right\|}.$$

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ considérons

$$u_1 = (1, -1, 0);\ u_2 = (0, 2, 1) \text{ et } F = Vect(u_1, u_2)$$

et calculons une base orthonormée de $F$ par le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

on voit alors $\|v_1\| = 1$ et $Vect(u_1) = Vect(v_1)$. On a

$$u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle\, v_1 = (0, 2, 1) + \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) = (1, 1, 1)$$

et on pose donc

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle\, v_1}{\|u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle\, v_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

D'où $(v_1, v_2)$ est une base orthonormée de $F$.

### Corollaire 1 (Existence des bases orthonormées)

Tout espace euclidien ou hermitien admet des bases orthonormées.

### Corollaire 2 (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit $E$ un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$, où $1 \leq p \leq n-1$, une famille orthonormée de $E$. Alors il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de $E$ tel que $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de $E$.

## V. 5. Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Nous avons vu à la section sur la réduction des endomorphismes qu'étant donnée une matrice $A$, on cherche une matrice diagonale $D$ semblable à $A$ ; ou d'une façon équivalente, on cherche une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $A$ est représentée par une matrice diagonale.

Dans les espaces euclidiens ou hermitiens, où nous disposons d'un produit scalaire, on peut se demander, étant donnée une matrice $A$, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle $A$ est représentée par une matrice diagonale.

Nous verrons que les matrices qui vérifient cette propriété dans les espaces eudlidiens sont les matrices symétriques et dans les espaces hermitiens sont les matrices hermitiennes.

## V. 5. 1. Matrices symétriques

## Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$ une matrice de type $(n, m)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La transposée de $A$, notée ${}^tA$, est la matrice de type $(m, n)$ définie par : pour $1 \leq j \leq n$, la colonne $j$ de ${}^tA$ est égale à ligne $j$ de $A$.

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Définition**

On dit que $A$ est symétrique si elle est égale à sa transposée.

$$A \text{ est symétrique si et seulement si } A = {}^tA.$$

## Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique, alors que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

n'est pas symétrique car $B \neq {}^tB$

$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Proposition

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A$ est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si $A$ est symétrique.

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de $A$ sont deux-à-deux orthogonaux.

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A$ est symétrique, alors il existe une matrice de passage $P$ et une matrice diagonale $D$ tel que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice $P$ ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Elle est en fait orthogonale.

## Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $P$ est orthogonale si $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I_n$.
Autrement dit si $P$ est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La première représente une rotation d'angle $\theta$ et le seconde représente une symétrie orthogonale.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

## Proposition

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $P$ est orthogonale si et seulement si $P$ est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$ à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $E$.

# Mise en pratique

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et cherchons une matrice diagonale $D$ et une matrice orthogonale $P$ tel que $A = PDP^{-1}$. Comme $A$ est symétrique cela est possible.

Les valeurs propres de $A$ sont $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Les sous-espaces propres sont

$$E_{-1/2}(A) = Vect((1,-1)),\ E_{5/2} = Vect((1,1))$$

et par conséquent, en posant $\vec{u} = (1,-1)$ et $\vec{v} = (1,1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u},\vec{v})$ est une base de vecteurs propres de $A$. Pour avoir une base orthonormée, on prend les vecteurs unitaires

$$\vec{u}' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}),\quad \vec{v}' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et donc $\mathcal{B}' = (\vec{u}',\vec{v}')$ est une base orthonormée dans laquelle $A$ est représentée par une matrice diagonale.

On a finalement

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } A = PD^tP.$$

# V. 5. 2. Matrices hermitiennes

Dans un espace hermitien, les matrices symétriques ne sont pas suffisantes pour caractériser les matrices diagonalisables dans des bases orthonormées.

## Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée $(n, n)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La conjuguée de $A$, notée $\overline{A}$, est la matrice carrée $(n, n)$ dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de $A$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

## Définition

Soit $A$ une matrice carrée $(n, n)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. La transconjuguée de $A$ est la transposée de la conjuguée de $A$, elle est notée $A^*$.

Donc $A^* = {}^t\overline{A}$.

### Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 3 \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

**Définition**

Soit $A$ une matrice carrée $(n, n)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On dit que $A$ est hermitienne si $A = A^*$.

## Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix},\ \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix},\ B^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

et donc $B$ est hermitienne.

### Proposition

Soient $E$ un espace hermitien de dimension $n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $A$ est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si $A$ est hermitienne.

Soient $E$ un espace hermitien de dimension $n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de $A$ sont deux-à-deux orthogonaux.

Soient $E$ un espace hermitien de dimension $n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même ici, si $A$ est hermitienne, alors il existe une matrice de passage $P$ et une matrice diagonale $D$ tel que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice $P$ ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Dans le cas des espaces hermitiens, elle est en fait unitaire.

## Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $P$ est unitaire si $P \cdot P^* = P^* \cdot P = I_n$. Autrement dit si $P$ est inversible et $P^{-1} = P^*$.

## Proposition

Soient $E$ un espace hermitien de dimension $n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $P$ est unitaire si et seulement si $P$ est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$ à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $E$.