

Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2015

V. Systèmes d'équations linéaires

V. I. Introduction

Les systèmes linéaires interviennent dans diverses branches des mathématiques, ainsi que dans la résolution de nombreux problèmes issus des autres domaines, comme la physique, la mécanique, l'économie, le traitement du signal, ...

Ils peuvent être considérés comme la "base calculatoire" de l'algèbre linéaire. Ils sont au coeur du traitement d'une grande partie des problèmes issus de l'algèbre linéaire en dimension finie. Par exemple, ils permettent de déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire, de déterminer si une famille de vecteurs est libre ou non,

Exemples de la géométrie euclidienne

- Dans le plan (Oxy), l'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by = c,$$

où a, b et c sont des réels.

- Considérons deux droites : \mathcal{D}_1 d'équation $ax + by = c$ et \mathcal{D}_2 d'équation $dx + ey = f$. Alors un point (x, y) appartient à l'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, si et seulement si, il est solution du système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Remarquons que trois cas se présentent :

- \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 s'intersectent en un seul point : (S) a une unique solution
- \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles : (S) n'a pas de solution
- \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Dans l'espace ($Oxyz$), l'intersection de deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 est l'ensemble des solutions du système

$$(S) \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Trois cas se présentent :

- \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 s'intersectent en une droite : (S) a une infinité de solutions
- \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles : (S) n'a pas de solution
- \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

V. 2. Définitions, propriétés

On appelle **système linéaire** de n équations et à m inconnues x_1, \dots, x_m , tout système de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et b_1, \dots, b_n sont des éléments de \mathbb{K} .

- Les nombres a_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, sont les **coefficients** du système (S).
- Le n -uplet (b_1, \dots, b_n) est le **second membre** du système (S).

Exemples

(1) Pour $n = 1$, on obtient une **équation linéaire**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b.$$

(2) Équation d'une droite dans le plan : $ax + by = c$.

(3) Systèmes à 2 équations et 2 inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 9x + 6y = 3 \end{cases}$$

(4) Le système

$$(S) \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$$

a comme second membre $(1, 1, 1)$.

(1) La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est appelée la **matrice du système (S)**. Elle sera notée A_S .

(2) Si le second membre du système est nul, autrement dit $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, on dit que le système (S) est **homogène**.

Exemples

(1) Soit (S) le système

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$.

(2) Le système

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

est homogène.

V. 3. Écriture matricielle

Soit (S) un système linéaire

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

$A = A_S = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ sa matrice et (b_1, \dots, b_n) son second membre.

En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on peut écrire le système (S) sous la **forme matricielle**

$$A \cdot X = B.$$

Exemple

Soit (S) le système

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = 10. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} 2x + 7y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 6z = 11, \\ x - y + 9z = 0. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} 2x + 9y = 1, \\ 3x - 2y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 3, 1)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V. 4. Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soient \mathbb{K}^m et \mathbb{K}^n munis respectivement des bases canoniques.

Soit (S) un système linéaire de n équations et m inconnues de matrice A .

Alors on peut associer canoniquement une **application linéaire f à (S)** définie sur \mathbb{K}^m à valeurs dans \mathbb{K}^n : c'est l'application linéaire associée à A (relativement aux bases canoniques)

$$f(x_1, \dots, x_m) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, (S) est équivalent à

$$f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

V. 5. Ensemble des solutions

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations et à m inconnues.

- Une **solution** de (S) est un m -uplet (s_1, \dots, s_m) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1 , s_2 pour x_2 , \dots , s_n pour x_n , dans (S) on obtient une égalité.
- L'**ensemble des solutions** de (S) est l'ensemble de toutes les solutions de (S) .
- On dit que (S) est **compatible** si (S) admet des solutions.

Proposition 1

Soit (S) un système linéaire **homogène** de n équations à m inconnues. L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^m .

Preuve

En utilisant l'application linéaire f associée à (S) , on a

(s_1, \dots, s_m) est une solution de (S) si et seulement si $f(s_1, \dots, s_m) = \vec{0}$
si et seulement si $(s_1, \dots, s_m) \in \text{Ker}(f)$.

Donc l'ensemble des solutions de (S) est le noyau de f . Comme ce dernier est un \mathbb{K} -e.v., il en est de même de l'ensemble des solutions de (S) . \square

Proposition 2

Soit (S) un système linéaire de n équations à m inconnues. Si \vec{s} est une solution particulière de (S) , alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\vec{s} + \text{Ker}(f) = \{\vec{s} + \vec{h} \mid \vec{h} \in \text{Ker}(f)\},$$

où f est l'application linéaire associée à (S) .

Preuve

Soit \vec{x} une solution de (S) . Alors $f(\vec{x}) = \vec{b}$, où \vec{b} est le vecteur représenté par le second membre de (S) . On a

$$f(\vec{x} - \vec{s}) = f(\vec{x}) - f(\vec{s}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

et donc $\vec{x} - \vec{s} \in \text{Ker}(f)$. D'où $\vec{x} = \vec{s} + (\vec{x} - \vec{s}) \in \vec{s} + \text{Ker}(f)$. Inversement, si $\vec{x} = \vec{s} + \vec{h}$, avec $\vec{h} \in \text{Ker}(f)$, alors $f(\vec{x}) = f(\vec{s} + \vec{h}) = \vec{b} + f(\vec{h}) = \vec{b}$ et donc \vec{x} est solution de (S) . □

Proposition 3

Tout système d'équations linéaires possède ou bien **aucune solutions**, ou bien **une seul solution**, ou bien **une infinité de solutions**.

Preuve

Soit $f(\vec{x}) = \vec{b}$ l'interprétation à l'aide d'une application linéaire de (S) . Un des cas suivants se présentent :

- $\vec{b} \notin \text{Im}(f)$: (S) n'a pas de solutions
- $\vec{b} \in \text{Im}(f)$ et $\text{Kerf}(f) = \{\vec{0}\}$: (S) a une unique solution
- $\vec{b} \in \text{Im}(f)$ et $\text{Kerf}(f) \neq \{\vec{0}\}$: (S) a une infinité de solutions



V. 6. Existence des solutions

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle **rang de la matrice A** la dimension du sous-espace vectoriel (de \mathbb{K}^m) engendré par ses vecteurs colonnes.

Propriété

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égal au rang de l'application linéaire qui lui est associée. En effet, si f est l'application linéaire associée à A

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m)))$$

or on vérifie que

$$f(\vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i = \text{la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Définition

- Soit A une matrice de type (m, n) . On appelle **matrice extraite de A** , toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes de A .
- On appelle **déterminant extrait de A** , tout déterminant d'une matrice **carrée** extraite de A .

Théorème (Calcul pratique du rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A au moins une matrice carrée inversible de type (r, r) . □

Exemples

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est $\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible; d'où $\text{rg}(A) = 3$.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Donc on ne peut pas extraire une matrice d'ordre 3 inversible. Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ extraite de A possède un déterminant non nul; d'où $\text{rg}(A) = 2$.

Définition

Soit (S) un système de n équations à m inconnues de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et de second membre \vec{b} .

- Le **rang de (S)** est par définition le rang de sa matrice :

$$rg(S) = rg(A).$$

- La **matrice augmentée** de (S) est la matrice, notée $[A|\vec{b}]$, définie par :

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour bien distinguer le second membre \vec{b} de A et pour des raisons pratiques de calculs, on écrit $[A|\vec{b}]$ sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

Exemple

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} 2x + 7y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 6z = 11, \\ x - y + 9z = 0. \end{cases}$$

Alors la matrice du système (S) est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. Donc $[A|\vec{b}]$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 11 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

Proposition (CNS pour l'existence des solutions)

Soit (S) un système d'équations linéaires, de matrice A et de second membre \vec{b} . Alors (S) est compatible, si et seulement si, $rg(A) = rg([A|\vec{b}])$.

Exemple

Soit

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y + 3z = 0 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Alors la matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A

est $\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible; d'où $\text{rg}(A) = 3$. La matrice augmentée de (S) est

$[A|\vec{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right)$. Son rang ne peut être 4 et comme A est une

matrice extraite de rang 3; $\text{rg}([A|\vec{b}]) = 3$. Donc (S) est compatible (admet des solutions).

V. 7. Méthodes de résolution

V. 7. 1. Systèmes de Cramer

Définition

On dit qu'un système de n équations linéaires à n inconnues est un **système de Cramer** si la matrice A de ce système est inversible.

Proposition

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit B , le système (S) admet une solution et une seule.
- Quel que soit B , le système (S) admet au moins une solution.
- Quel que soit B , le système (S) admet au plus une solution.
- Le système homogène associé au système (S) n'admet que la solution triviale.
- La matrice A du système (S) est inversible.
- $\det(A) \neq 0$.

La solution unique du système (S) est alors $X = A^{-1}B$.

Proposition (Règle de Cramer)

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le second membre B .

Supposons que (S) est de Cramer (donc $\det(A) \neq 0$). Alors l'unique solution (x_1, \dots, x_n) de (S) est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Exemple

Soit

$$(S) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc (S) est un système de Cramer et l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{1} = 9, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4.$$

V. 7. 2. Méthode du pivot de Gauss

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée** si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne. Autrement dit : le nombre de coefficients nuls commençant la ligne L_{i+1} est strictement plus grand que le nombre de coefficients nuls commençant la ligne L_i .

Exemple

Les matrices suivantes sont échelonnées

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Définition

Un système (S) est dit **échelonné** si sa matrice est échelonnée.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée réduite** si elle est échelonnée et si le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple

Les matrices suivantes sont échelonnées et réduites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices suivantes sont échelonnées mais pas réduites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

Un système (S) est dit **échelonné réduit** si sa matrice est échelonnée et réduite.

La méthode de pivot de Gauss consiste à transformer un système, en utilisant des "opérations élémentaires", à un système **échelonné réduit**. Il se trouve que les systèmes échelonnés réduits sont plus faciles à résoudre.

Exemple

Soit

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

qui est échelonné et réduit ; car sa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est échelonnée et réduite. Alors l'ensemble des solutions est

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1 - 2\lambda, x_2 = \lambda, x_3 = 4, x_4 = 3; \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Définition

Les opérations suivantes sur les équations d'un système linéaire (ou sur les lignes de sa matrice) sont appelées des **opérations élémentaires** :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$: multiplier l'équation L_i par le scalaire non nul λ .
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$: rajouter à l'équation L_i , l'équation L_j multipliée par le scalaire λ .
- $L_i \leftrightarrow L_j$: permuter les deux équations L_i et L_j .

Propriété

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système. Ils transforment un système linéaire à un autre systèmes ayant le même ensemble de solutions.

Étape 1 : échelonnement

- Il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Si ce n'est pas le cas, on permute la ligne L_1 par la première ligne dont le premier coefficient est non nul : $L_1 \leftrightarrow L_j$.
- Si le premier coefficient de la première ligne est différent de 1, on multiplie L_1 par $1/a_{11}$: $L_1 \leftarrow 1/a_{11}L_1$. Nous avons un **pivot** en position $(1, 1)$.
- Le pivot sert à éliminer tous les autres termes sur la même colonne : pour $2 \leq i \leq n$, on remplace l'équation L_i par $L_i - a_{i1}L_1$, on élimine ainsi x_1 dans l'équation L_i .

Soit

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires directement sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Exemple

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Étape 2 : réduction

En partant de la dernière ligne et en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot, on applique la même méthode que celle de l'étape d'échelonnement, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array} \right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Étape 3 : resolution

Maintenant le système est échelonné et réduit, sa résolution est plus simple.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée réduite obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array} \right)$$

Le système devient

$$\begin{cases} x = -5/9 \\ y = 8/9 \\ z = 11/9 \end{cases}$$

et la solution, dans ce cas, est évidente.

Exemple 2

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} -y + 2z + 13t = 5 \\ x - 2y + 3z + 17t = 4 \\ -x + 3y - 3z - 20t = -1 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array} \right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Exemple 2

Pour réaliser la réduction, on remonte à partir de la dernière ligne en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Exemple 2

Le système (S) est maintenant équivalent à

$$\begin{cases} x - 4t = -2 \\ y - 3t = 3 \\ z + 5t = 4 \end{cases}$$

où x, y, z sont les variables **principales** et t est la variable **secondaire** (ou paramètre). L'ensemble des solutions est

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2 + 4\lambda, y = 3 + 3\lambda, z = 4 - 5\lambda, t = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ & = (-2, 3, 4, 0) + \text{Vect}\left((4, 3, -5, 1)\right). \end{aligned}$$

V. 8. Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Si A est une matrice carrée inversible de type (n, n) et B est l'inverse de A , alors

$$AB = I_n$$

Si B_1, \dots, B_n sont les colonnes de B , l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AB_i = \vec{e}_i, i = 1, \dots, n.$$

Donc calculer B revient à résoudre n systèmes d'équations linéaires ayant la même matrice A .

Pour calculer la matrice inverse, on applique la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes précédents parallèlement.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit alors le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et on applique la méthode de Gauss.

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array} \right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right)$$

Donc la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$