Notions sur les équations aux dérivées partielles

Mathématiques 3, 2015

Rappel : équations différentielles ordinaires

On considère l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = f$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application. On lui associé l'équation homogène (sans second membre)

$$(EH) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH) est un espace vectoriel de dimension 2.

Rappel : équations différentielles ordinaires

Pour résoudre l'équation (E), on calcule une solution particulière y_0 de (E) et on résout l'équation homogène associée (EH).

Si y_{EH} est la solution générale de (EH) alors la solution générale de (E) est

$$y_E = y_{EH} + y_0.$$

Rappel : équations différentielles ordinaires

Pour résoudre l'équation homogène (EH) on associé l'équation caractéristique

$$(EC) \qquad ar^2 + br + c = 0.$$

Rappel : équations différentielles ordinaires

• Si $\Delta > 0$ alors (EC) admet deux solutions réelles r_1, r_2. Dans ce cas les fonctions

$$e^{r_1 x}, \; e^{r_2 x}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rappel : équations différentielles ordinaires

• Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet une racine réelle double r. Dans ce cas les fonctions

$$xe^{rx},\ e^{rx}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{rx} x + C_2 e^{rx}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rappel : équations différentielles ordinaires

$\bullet$ Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Dans ce cas les fonctions

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes

$$
(EO) \qquad \left\{ \begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\
u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\
u(x, t) = u(x + 2, t), &
\end{array} \right.
$$

avec

$$
u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ccc}
x & si & x \in [0, 1[, \\
2 - x & si & x \in [1, 2],
\end{array} \right.
$$

et $u_1(x) = 0$.

On cherche d'abord les développements en série de Fourier des fonctions u_0 et u_1. Comme u_1 est identiquement nulle son développement en série de Fourier est nul.

On calcule donc le développement en série de Fourier de u_0 (en toute rigueur celui de la fonction $\bar{u}_0$ paire définie sur $\mathbb{R}$, 2-périodique et qui coïncide avec u_0 sur $[0, 2]$).

La fonction étant paire on a $b_n = 0$ et donc on calcule a_n. On a $(T = 2 = \frac{2\pi}{\omega})$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u_0(x)\, dx = \int_0^2 u_0(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx$$

$$= 1.$$

Pour $n \geq 1$

$$a_n = \int_0^2 u_0(x)\cos(n\pi x)\ dx = \int_0^1 x\cos(n\pi x)\ dx + \int_1^2 (2-x)\cos(n\pi x)\ dx$$

Par une IPP

$$\int_0^1 x\cos(n\pi x)\ dx = \Big[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\ dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\Big[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

Avec le changement de variable $t = 2 - x$

$$\int_1^2 (2 - x) \cos(n\pi x)\ dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x)\ dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

D'où

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}.$$

La série de Fourier de u_0 est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

Comme $\bar{u}_0$ est continue et dérivable par morceau, on a d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in [0, 2]$

$$u_0(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné.

Soit $u(x,t)$ une solution de (EO) 2-périodique développable en série de Fourier

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n''(t)\cos(n\omega x) + b_n''(t)\sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\geq 1}(-(n\omega)^2 a_n(t)\cos(n\omega x) - (n\omega)^2 b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En reprenant les notations du cours précédent, par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = a_{0,0}, \;\; a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = a_{0,n}, \;\; a_n'(0) = a_{1,n},$$
$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = b_{0,n}, \;\; b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.
Comme $\omega = \pi$ et avec ce qui précède, on obtient

$$(1) \qquad a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = 1, \;\; a_0'(0) = 0$$

$$(2) \qquad a_n''(t) + (cn\pi)^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \;\; a_n'(0) = 0$$

$$(3) \qquad b_n''(t) + (cn\pi)^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = 0, \;\; b_n'(0) = 0$$

La résolution de l'équation (1) donne

$$a_0(t) = 1.$$

L'équation (2) est une équation linéaire homogène du second ordre et son équation caractéristique est $r^2 + (cn\pi)^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm icn\pi$. La solution générale est donc

$$a_n(t) = C_1 \cos(cn\pi t) + C_2 \sin(cn\pi t).$$

Les conditions initiales donnent

$$a_n(0) = C_1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2},\ a_n'(0) = C_2 cn\pi = 0.$$

D'où

$$a_n(t) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(cn\pi t).$$

La résolution de (3) donne immédiatement $b_n(t) = 0$.

D'où finalement la solution recherchée est

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\right) \cos(cn\pi t) \cos(n\pi x).$$