Notions sur les équations aux dérivées partielles

Mathématiques 3, 2015

Pour étudier les phénomènes réels, on utilise les lois de la physique : mécanique, électromagnétisme, acoustiques, thermodynamiques, quantiques, relativistes, etc.

Cette étude se traduit généralement par une modélisation mathématique par des équations différentielles ordinaires ou par des *équations aux dérivées partielles*.

Quelques rappels

Définition 1

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{h},$$

existe et finie, on l'appelle la i-ème dérivée partielle de f au point $(a_1, \cdots, a_n) \in D$ et on la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$.
Si pour tout $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, f admet une i-ème dérivée partielle au point $\bar{a}$, l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \bar{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$ est appelée la i-ème dérivée partielle de f (ou souvent la dérivée partielle par rapport à la variable x_i).

Quelques rappels

Exemple 1

Considérons la fonction $f(x, y) = xy$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)b - ab}{h} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{b + h - ab}{h} = a.$$

Remarque

Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable x_i, on fixe les autres variables et on calcule la dérivée au sens usuel où la variable est x_i. Dans l'exemple précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (xy)' \text{ (où } y \text{ est considérée comme une constante)} \ = y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy)' \text{ (où } x \text{ est considérée comme une constante)} \ = x.$$

Quelques rappels

Définition 2

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f existent en un point $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, alors on appelle gradient de f au point $\bar{a}$ le vecteur

$$\nabla f(a_1, \cdots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \cdots, a_n)\right)$$

Exemple 1 (suite)

On a

$$\nabla f(a, b) = (b, a).$$

Quelques rappels

Définition 3

La dérivée partielle de f d'ordre j par rapport aux variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_j}$ est définie par

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big(\frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}\Big).$$

Exemple 2

Considérons la fonction $f(x, y) = x^4 + y^3$. Alors, les dérivées d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) = 12x^2, \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Quelques rappels

Définition 4

Le Laplacian d'une fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est

$$\Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}).$$

Une équation aux dérivée partielles (EDP en abrégé) est une relation entre une fonction de plusieurs variables $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et ses dérivées partielles :

$$(E) \qquad F\Big(\bar{x}, u, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\Big) = 0$$

où m est le degré de l'équation.

Le problème est posé sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On cherche des applications $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E) et satisfaisant des conditions initiales et des conditions sur le bord ∂D.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est

$$(E) \qquad \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \delta\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta u = f,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \zeta$ sont des constantes et $f : D \to \mathbb{R}$ est une application appelée le second membre de l'équation.

On dit que l'equation (E) est :

- *elliptique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$,
- *parabolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$,
- *hyperbolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

Exemples

- L'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est hyperbolique.
- L'équation de Laplace (ou Poisson) $\Delta u = 0$ ou $\Delta u = f$ est elliptique.
- L'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} - c \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est parabolique ($c > 0$).

Équation des ondes

La propagation d'une onde sur une corde infinie est modélisée par l'équation des ondes sur $\mathbb{R}$

$$(EO1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale.

Équation des ondes : formule de D'Alembert

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

La solution de l'équation des ondes $(EO1)$ où on suppose que u_0 est une fonction différentiable est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\, dy.$$

Équation des ondes : conditions aux limites

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde sur une demi-corde (infinie). Elle est modélisée par l'équation des ondes avec une condition de frontière :

$$(EO2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & \forall t > 0, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. Physiquement, la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante.

Équation des ondes : conditions aux limites et formule de D'Alembert

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

La solution de l'équation des ondes $(EO2)$ où on suppose que u_0 est une fonction différentiable est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(ct-x)\Big) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} u_1(y)\,dy.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On cherche les solutions à variables séparées de l'équation des ondes. On suppose qu'il existe des fonctions F et G telles que

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG''$$

et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$FG'' = c^2 F'' G.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

En supposant en plus que $F(x) \neq 0$ et $G(t) \neq 0$, on obtient

$$c^2 \frac{F''}{F}(x) = \frac{G''}{G}(t).$$

Comme la fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t, il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$c^2 \frac{F''}{F}(x) = \lambda, \quad \frac{G''}{G}(t) = \lambda.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors
$$F(x) = ax + b,\ G(t) = \alpha t + \beta.$$
- si $\lambda > 0$, alors
$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x},\ \ G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}.$$
- si $\lambda < 0$, alors
$$F(x) = a\cos(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x) + b\sin(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x),$$
$$G(t) = a\cos(\sqrt{-\lambda}t) + b\sin(\sqrt{-\lambda}t).$$

En tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation des ondes : séries de Fourier

On cherche les solutions L-périodiques de l'équations des ondes :

$$(EO3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) = u(x+L,t), & \end{array} \right.$$

où on suppose que les fonctions u_0 et u_1 sont périodiques et admettent un développement en séries de Fourier ($\omega = \frac{2\pi}{L}$)

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{0,n} \cos(n\omega x) + b_{0,n} \sin(n\omega x))$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{1,n} \cos(n\omega x) + b_{1,n} \sin(n\omega x))$$

Équation des ondes : séries de Fourier

Supposons que la solution $u(x,t)$ est développable en séries de Fourier

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n''(t)\cos(n\omega x) + b_n''(t)\sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(n\omega)^2\Big(\sum_{n\geq 1}(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x))\Big).$$

Équation des ondes : séries de Fourier

Par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = a_{0,0}, \;\; a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = a_{0,n}, \;\; a_n'(0) = a_{1,n},$$
$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = b_{0,n}, \;\; b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

Équation des ondes : séries de Fourier

En résolvant les équations différentielles ordinaires précédentes, on obtient

$$a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0},$$

$$a_n(t) = a_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t),$$

$$b_n(t) = b_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t),$$

et donc la solution $u(x,t)$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes, avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,1[, \\ 2-x & si \quad x \in [1,2[, \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

Équation de Laplace, Équation de Poisson

On considère l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = \rho.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

On cherche des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

à variables séparées. On suppose donc qu'il existe deux fonctions $F(x)$ et $G(y)$ telles que

$$u(x, y) = F(x)G(y).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe donc une constante λ telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

Comme dans le cas des équations des ondes, on distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b,\ \ G(y) = \alpha y + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x},\ \ G(y) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta\sin(-\sqrt{\lambda}y).$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$G(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation de la chaleur avec une condition initiale

$$(EC1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et l'équation de la chaleur avec une condition au bord

$$(EC2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0,t) = u_0(t), & \forall t > 0, \end{cases}$$

Équation de la chaleur

Grâce aux séries de Fourier ...

Théorème 3

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors il existe une unique solution u de $(EC1)$ vérifiant

- pour tout $t > 0$, $u(x, t)$ est 2π-périodique comme fonction en x,
- la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{t \to 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Équation de la chaleur

Théorème 4

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors il existe une unique solution u de $(EC2)$ vérifiant

- pour tout $x > 0$, $u(x,t)$ est 2π-périodique comme fonction en t,
- la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{x \to 0^+} \sup_{t>0} |u(x,t) - u_0(x)| = 0$.