Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2015

IV. Séries trigonométriques, séries de Fourier

IV. 1. Introduction

Joseph Fourier avait introduit l'équation de la chaleur et avait étudié les solutions de cette équation qu'on peut obtenir comme sommes de séries trigonométriques qui depuis portent son nom : séries de Fourier.

Les séries de Fourier constitue un outil important dans l'étude des fonctions périodiques et dans le traitement du signal.

Considérons une barre homogène de longueur finie L. On s'intéresse à déterminer la température $u(x,t)$ de la barre au point x et à l'instant t.

On considère des des conditions initiales, on suppose que la température est nulle aux extrémités et qu'à l'instant $t = 0$ elle est donnée par une fonction $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$.

L'équation qui régit la température $u(x,t)$ en chaque point x à un instant $t > 0$ est l'équation de la chaleur à une dimension

$$(E) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

où D est le coefficient de diffusion.

En cherchant des solutions particulières de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$, on aboutit après calcul aux solutions de (E) de la forme

$$u_n(x,t) = b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \exp(\frac{-\pi^2 n^2}{L^2} Dt)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{R}$.
Ces solutions ne satisfont pas forcément les conditions initiales.

Comme l'équation E est linéaire, on constate que la somme des fonctions de la forme précédente reste encore une solution de E. En passant aux sommes d'un nombre infini, donc aux séries, on est amené à chercher des solutions de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \exp(\frac{-\pi^2 n^2}{L^2} Dt),$$

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions, qui servent à décomposer les fonctions périodiques comme une "combinaison linéaire" de fonctions périodiques plus simples, de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$.

Donc comme la somme d'une série de la forme

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

IV. 2. Séries trigonométriques

Définition 1

On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ et (a_n) et (b_n) sont des suites réelles ou complexes.

On dit que la série est réelle si (a_n) et (b_n) sont des suites réelles.

Périodicité

Rappel

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Le plus petit T vérifiant la propriété précédente (s'il existe) est appelé la période de f.

Exemple

La fonction $x \mapsto \cos(n\omega x)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
On a

$$\cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \cos(n\omega x + 2k\pi) = \cos(n\omega x).$$

Périodicité

Supposons que la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Comme les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques, on déduit que la somme f est périodique. En effet, on a

$$\cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \cos(n\omega x),\ \sin(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \sin(n\omega x)$$

et donc $f(x + \frac{2k\pi}{\omega}) = f(x)$. Donc f est de période $T = 2\pi/\omega$.

Convergence

Proposition 1

Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Convergence

Proposition 2

Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Ecriture complexe

Considérons la série trigonométrique réelle

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

En utilisant les formules d'Euler

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

la série (1) s'écrit :

Ecriture complexe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(e^{in\omega x} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x} \frac{a_n + ib_n}{2}\right).$$

Posons

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Ecriture complexe

Alors la série (1) devient

$$
\begin{aligned}
& c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{-\infty}^{n=1} c_n e^{in\omega x} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.
\end{aligned}
$$

La dernière expression est appelée la forme complexe de la série trigonométrique (1).

Calcul des coefficients a_n, b_n

Considérons la série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)). \tag{1}$$

On souhaite calculer les coefficients a_n et b_n en fonction de f comme dans le cas des fonctions développables en séries entières.

Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé. En multipliant les deux côtés de l'égalité (1) par $\cos(p\omega x)$ on a

$$f(x)\cos(p\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(p\omega x)$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x)\cos(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\cos(p\omega x)$$

On multiplie aussi les deux côtés de l'égalité (1) par $\sin(p\omega x)$

$$f(x)\sin(p\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(p\omega x)$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x)\sin(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)$$

Calcul des coefficients a_n, b_n

Comme la série converge uniformément, on peut intégrer terme par terme

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(p\omega x)\ dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2}\cos(p\omega x)\ dx$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\ dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\cos(p\omega x)\ dx.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(p\omega x)\,dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2}\sin(p\omega x)\,dx$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(p\omega x)\,dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\,dx.$$

Il reste donc à calculer

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\ dx, \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\ dx.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n

Exercice

Montrer que

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(p\omega x)\,dx = 0.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n

Après substitution, on obtient donc

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x)\ dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x)\ dx.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n : conclusion

Considérons la série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x)\; dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x)\; dx.$$

En écriture complexe

On obtient

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)e^{in\omega x}\,dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

IV. 3. Séries de Fourier

Définition 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique où on pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$, intégrable sur tout intervalle fermé et borné. On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x)\ dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x)\ dx.$$

Séries de Fourier

On peut écrire les coefficients en fonction de la période T

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx.$$

On peut se demander :

- La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
- En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

Notation

Si la série de Fourier associée à f converge simplement on note sa somme Sf.

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Définition 3

Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche en x_0 existent et finies.

Théorème de Dirichlet

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique satisfaisant aux conditions suivantes, appelées conditions de Dirichlet :

- Les discontinuités de f (si elle existent) sont de première espèce et sont en un nombre fini dans tout intervalle fermé et borné $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2}\big(\lim_{t\to x^+} f(t) + \lim_{t\to x^-} f(t)\big).$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est $f(x)$.
De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné où la fonction f est continue.

Périodicité et intégrales

Propriété

Soit $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique ($T > 0$). Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Preuve

On a

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

Or en utilisant le changement de variable $t = x - T$, on a

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx, \quad \text{d'où le résultat.}$$

Périodicité et intégrales

Donc pour le calcul des coefficients de Fourier,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx,$$

et pour les fonctions 2π-périodiques, en prenant $a = -\pi$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Parité et intégrales

Rappel

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f est paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est paire alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$
- Si f est impaire alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Parité et intégrales

Conséquence

- Si f est paire alors

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Si f est impaire alors

$$a_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Exemple 1

Soit $0 < \alpha < \pi$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f.
Vérifions que f est paire. Si $|x| \leq \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 1$ et si $|x| > \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 0$.

Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}(\int_{0}^{\alpha} 1dx) = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(\int_{0}^{\alpha} \cos(nx)dx) = \frac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}.$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. La fonction f a deux points de discontinuité sur $[-\pi, \pi]$: $-\alpha, \alpha$. Comme f est dérivable par morceau, et comme f est continue sur $[-\pi, \pi] \setminus \{-\alpha, \alpha\}$, d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}\cos(nx), \text{ pour tout } x \in [-\pi, \pi] \backslash \{-\alpha, \alpha\},$$

$$Sf(-\alpha) = \frac{f((-\alpha)^+) + f((-\alpha)^-)}{2} = \frac{1}{2}, \quad Sf(\alpha) = \frac{f(\alpha^+) + f(\alpha^-)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f. Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}(\int_0^{\pi} xdx) = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. Comme f est dérivable par morceau, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Application. En prenant $x = 0$, on obtient

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Applications définies sur un intervalle fermé et borné

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application où $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite développer f en séries de Fourier. Pour ce faire, on cherche une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T \geq b - a$ telle que la restriction de g à $[a, b]$ coïncide avec f.

Si g satisfait les conditions de Dirichlet, on aura

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

aux points où g est continue. En particulier, aux points où f est continue

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Applications définies sur un intervalle fermé et borné

Propriété

Soit $f : [a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceau telle que $f(a) = f(a+2\pi)$. Alors il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceau qui coïncide avec f sur $[a, a+2\pi]$.

Preuve

On translate le graphe de f sur les intervalles de la forme $[a+2k\pi, a+2(k+1)\pi]$ qui recouvrent $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [a+2k\pi, a+2(k+1)\pi], \text{ et on définit } g \text{ sur } [a+2k\pi, a+2(k+1)\pi]$$

$$\text{par } g(x) = f(x-2k\pi)$$

On vérifie bien que g est 2π-périodique et coïncide sur $[a, a+2\pi]$ avec f. $\square$

Exemple 3

Développons en série de Fourier la fonction e^x sur l'intervalle $]0,\pi[$. On définit

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \in]0,\pi[\\ e^{-x} & si \quad x \in]-\pi,0]. \end{cases}$$

Alors f vérifie les conditions de la propriété précédente et donc il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique qui coïncide avec f sur $]-\pi,\pi[$. La fonction g est paire et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}(\int_0^{\pi} e^x \, dx) = \frac{2(e^{\pi}-1)}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx = 2\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}.$$

Donc pour tout $x \in]0, \pi[$, on a

$$e^x = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1 + n^2} \cos(nx).$$

Bessel-Parseval

Théorème 1 (Bessel-Parseval)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, où $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, continue par morceau. Alors (Inégalité de Bessel)

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)^2\,dx,$$

En plus, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|c_n|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$ sont convergentes et on a

(Égalité de Parseval)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)^2\,dx,$$

où a_n, b_n sont les coefficients de la série de Fourier associée à f et c_n est le coefficient en écriture complexe.

Bessel-Parseval

Remarque

Donc si f est 2π-périodique, (et continue par morceau), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx.$$

Bessel-Parseval

Exemple 1 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 2π, définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $0 < \alpha < \pi$. On a $a_0 = \dfrac{2\alpha}{\pi}$, $a_n = \dfrac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}$. En appliquant la formule de Parseval on obtient :

$$\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{4\sin^2(n\alpha)}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{\alpha}{\pi},$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) = \frac{\alpha\pi - \alpha^2}{2}.$$

Exemple 2 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

On a $a_0 = \pi$, $\quad a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

En appliquant l'égalité de Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Interprétation géométrique et vectorielle

On peut réinterpréter la théorie des séries de Fourier en utilisant les notions d'espace vectoriel et de produit scalaire.

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues par morceau. Alors E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, muni des opérations usuelles

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

On définit

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Alors l'application $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais pas forcément définie positive. Cependant, elle conserve beaucoup de propriétés d'un produit scalaire.

Interprétation géométrique et vectorielle

Si

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = 0,$$

alors f est nulle sauf en un nombre fini de points. Pour pouvoir parler d'un produit scalaire, on identifié f et g si elles sont identiques sauf en un nombre fini de points sur $[0, 2\pi]$.
Ainsi sur ce nouveau espace, l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle$ devient un produit scalaire.
On peut aussi se restreindre à l'espace des applications continues où $\langle f|g\rangle$ est un produit scalaire.

Interprétation géométrique et vectorielle

Définition 1

On appelle semi-norme de la convergence en moyenne quadratique d'une fonction $f \in E$, le nombre réel

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, considérons l'application

$$e_n : x \mapsto e_n(x) = e^{inx}.$$

Alors $e_n \in E$.

Interprétation géométrique et vectorielle

Propriété 1

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans E.

Propriété 2

Soit $f \in E$. Le coefficient de Fourier c_n (de l'écriture complexe) de f vérifie

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx,$$

Remarquons que $c_n e_n$ est la projection orthogonale de f sur e_n.

Propriété 3

Soit $f \in E$. Les coefficients de Fourier a_n, b_n de f vérifient

$$a_n = 2\left\langle \cos(nx) | f \right\rangle, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } b_n = 2\left\langle \sin(nx) | f \right\rangle, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$