

Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2015

I. Espaces vectoriels

I. 1. Définition, propriétés

Intuitivement, un **espace vectoriel** est un ensemble dont les éléments sont appelés des **vecteurs**, qu'on peut **additionner** et **multiplier par des scalaires**. Pour que ceci ait un sens, l'addition et la multiplication par des scalaires doivent satisfaire certaines propriétés.

Dans la suite, \mathbb{K} désigne le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

Définition 1

Soit E un ensemble muni d'une **addition**

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

et d'une **multiplication par des scalaires**

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, \vec{u}) &\mapsto \lambda \vec{u} \end{aligned}$$

On dit que E , muni de ces opérations, est un \mathbb{K} -espace vectoriel si :

- (1) $(E, +)$ est un groupe commutatif : pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$
- commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
 - associativité : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;
 - existence d'un élément neutre $\vec{0} \in E$: $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
 - pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un inverse $-\vec{u} \in E$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
- (2) Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}, \quad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u},$$

$$\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}, \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

On appelle :

- **Vecteurs** les éléments de E ;
- **Scalars** les éléments de \mathbb{K} ;
- **Vecteur nul** le vecteur $\vec{0}$.

Exemple 1

Sur \mathbb{R}^2 , on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Alors \mathbb{R}^2 , muni de ces deux opérations, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exemple 2

Plus généralement, sur \mathbb{R}^n , on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors \mathbb{R}^n , muni de ces deux opérations, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

De même, sur \mathbb{C}^n , on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors \mathbb{C}^n , muni de ces deux opérations, est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Exemple 3

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de l'addition des polynômes

$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et de la multiplication par les scalaires

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Son vecteur nul est le polynôme nul. De même, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Propriétés

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

- $\lambda \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$;
- $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda \vec{u} - \lambda \vec{v}$;
- $(\lambda - \mu)\vec{u} = \lambda \vec{u} - \mu \vec{u}$;
- $(-\lambda) \cdot (-\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.

Propriété Importante

$\lambda \vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

I. 2. Sous-espaces vectoriels

Définition 2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-ensemble de E . On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si

- $\vec{0} \in F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.

Exemples

(1) E et $\{\vec{0}\}$ sont des s.e.v de E .

(2) Dans \mathbb{R}^3 , tout plan passant par l'origine est un s.e.v. Un plan \mathcal{P} passant par l'origine est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Vérifions que \mathcal{P} est un s.e.v de \mathbb{R}^3 . Comme \mathcal{P} passe par l'origine, On a

$\vec{0} \in \mathcal{P}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit

montrer que $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$. On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et } ax + by + cz = 0, \quad ax' + by' + cz' = 0.$$

D'où $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$.

Exercice

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . On définit l'addition et la multiplication par les scalaires par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- 1 Vérifier que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- 2 Soit F le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des applications dérivables. Montrer que F est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Proposition 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E . Alors l'intersection

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}$$

est un s.e.v de E .

Preuve

- (Pour tout $i \in I$, $\vec{0} \in F_i$) $\implies \vec{0} \in \bigcap_{i \in I} F_i$;
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $i \in I$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F_i$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$. □

Corollaire 1

- Si F et G sont des s.e.v, alors leur intersection $F \cap G$ est un s.e.v.
- Si F_1, F_2, \dots, F_n sont des s.e.v, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ est un s.e.v.

Définition 3

Soient U et V deux s.e.v du \mathbb{K} -e.v E .

- On appelle **somme** de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est **directe** si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la **somme directe** de U et V si
 - $F = U + V$;
 - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

On écrit $F = U \oplus V$.

Exemple

Considérons dans \mathbb{R}^2 deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(U est la droite vectoriel dirigée par \vec{u} , V est la droite vectoriel dirigée par \vec{v} .)

Alors U et V sont des s.e.v de \mathbb{R}^2 et $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ (exercice).

I. 3. Familles génératrices, familles libres, bases

Définition 4

Soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Tout vecteur de E de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, est appelé une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 , soient

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur quelconque $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Donc \vec{u} est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Proposition 2

Soit E un \mathbb{K} -e.v et $A \subseteq E$. Il existe un plus petit s.e.v de E contenant A . Il est unique et on l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par A . On le note $\mathbf{Vect}(A)$.

Preuve

E est un s.e.v de E contenant A . Donc il existe des s.e.v de E qui contiennent A . L'intersection F de ces s.e.v est un s.e.v de E contenant A . Il est le plus petit s.e.v qui contient A . En effet, si $A \subseteq H$, où H est un s.e.v de E , alors $F \subseteq H$. □

Proposition 3

Soit E un \mathbb{K} -e.v et $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A , autrement dit

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{u}_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in A \right\}.$$

Remarque

Donc un vecteur $\vec{u} \in E$ est dans $\text{Vect}(A)$, si et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$, il existe $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$.

Exemple

Considérons dans \mathbb{R}^2 deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $U = \text{Vect}(\{\vec{u}\})$ et $V = \text{Vect}(\{\vec{v}\})$.

Exercice

Montrer que $U + V = \text{Vect}(U \cup V)$.

Définition 4

Soit F un s.e.v du \mathbb{K} -e.v E et $S \subseteq E$.

- On dit que S est une **partie génératrice** de F si

$$F = \text{Vect}(S).$$

- On dit que S est **libre**, ou que les vecteurs de S sont **linéairement indépendants**, si

pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, pour tous $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in S$,

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que S est une **base** de E , si elle est génératrice et libre.

Théorème 1

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel non nul admet une base. Toutes les bases ont la même cardinalité : si B_1 et B_2 sont deux bases, alors il existe une bijection entre B_1 et B_2 .

Définition 5

On dit d'un \mathbb{K} -e.v E qu'il est de **dimension finie** s'il admet une base finie. Le cardinal (le nombre d'éléments) d'une base est appelé la **dimension** de E et est noté **$\dim(E)$** .

Exemple 1

Dans \mathbb{R}^n , considérons la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ où pour $1 \leq i \leq n$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n appelée la **base canonique** de \mathbb{R}^n . On a donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, le \mathbb{R} -e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à n , la famille des polynômes

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, \dots, P_n(X) = X^n$$

forme une base. Donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Proposition 4

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie n . Alors :

- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E .

Proposition 5

Soit B une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -e.v E de dimension finie n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E ;
- B est une famille libre à n éléments ;
- B est une famille génératrice à n éléments.

Définition 6

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , alors pour tout $\vec{u} \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

qui sont appelés les **composantes** de \vec{u} dans la base \mathcal{B} .

Proposition 6

Soient F et G deux s.e.v d'un \mathbb{K} -e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

II. Applications linéaires

II. Définitions, propriétés

Définition 7

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est **linéaire** si

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f : E \rightarrow E$ l'homothétie de rapport α

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}.$$

Alors f est linéaire. En effet :

- $f(\vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \lambda\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Exemple 2

Soit E l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^∞ .
L'application

$$D : E \rightarrow E, D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} D(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' \\ &= \lambda f' + g' \\ &= \lambda D(f) + D(g). \end{aligned}$$

Exemple 3

Une rotation R d'un angle θ autour de l'origine dans \mathbb{R}^2 est une application linéaire. En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix}.$$

Exercice

Montrer que toutes les applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont des homothéties.

Proposition 7

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F , noté $\mathcal{L}(E, F)$, munit des opérations

$$(f, g) \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un \mathbb{K} -e.v. □

Définition 8

- Une application linéaire de E dans E est appelé un **endomorphisme**.
Le \mathbb{K} -e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un **isomorphisme**.
- Un endomorphisme bijective est appelé un **automorphisme**.

II. 2. Image et noyau

Rappel

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- L'image directe par f d'une partie $A \subseteq E$ est :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- L'image réciproque d'une partie $B \subseteq F$ est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Proposition 8

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- Si H est un s.e.v de E , alors $f(H)$ est un s.e.v de F .
- Si G est un s.e.v de F , alors $f^{-1}(G)$ est un s.e.v de E .

Définition 9

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On appelle :

- **Image de f** , le s.e.v de E :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

- **Noyau de f** , le s.e.v de E :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire (Exercice). On a $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. En effet :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ et } x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x - y = a \text{ et } x + y = b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2} \text{ et } y = \frac{b-a}{2}.$

Proposition 10

Soit $f \in (E, F)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$;
- Pour tout $\vec{u} \in E$, $f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- $\text{Im}(f)=F$.

Définition 10

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v et $f \in (E, F)$. La dimension de $\text{Im}(f)$ est appelée le **rang de f** et est notée $\text{rg}(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$