CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU 3

(Mercredi 16 décembre 2015)
(Durée : 1h15)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (2 pts)

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. (1 pt)

   Il existe un unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *qui vérifie : pour tout* $|z| < R$, *la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est (absolument) convergente et pour tout* $|z| > R$, *la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est (grossièrement) divergente. Cet unique réel* R *est appelé le rayon de convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2. Donner la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et son rayon de convergence. (1 pt)

   Le rayon de convergence est 1 *et la somme est* $\dfrac{1}{1-z}$.

Exercice 1. (9 pts)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + y' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Montrer que $a_0 = y(0)$ et $a_1 = y'(0)$. (1,5 pts)

   On a
   $$y(0) = a_0 + a_1 0^1 + \cdots = a_0,$$
   et
   $$y'(0) = a_1 + 2a_2 0^1 + \cdots = a_1.$$
   (On peut aussi utiliser la série de Taylor-Maclaurin).

2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence
   $$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$
   (4 pts)

   On a
   $$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$
   En substituant dans l'équation (E) on a
   $$\begin{aligned} xy''(x) + y'(x) - y(x) &= x\Big(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\Big) + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + a_1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)a_n + n a_n) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$
   En posant $p = n - 1$, on a
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} = \sum_{p=1}^{+\infty} (p+1)^2 a_{p+1} x^p.$$
   D'où, comme la variable n est "muette"
   $$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
   $$= a_1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (p+1)^2 a_{p+1} x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$$

$$= a_1 + \sum_{p=1}^{+\infty}(p+1)^2 a_{p+1}x^p - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p x^p - a_0$$

$$= (a_1 - a_0) + \sum_{p=1}^{+\infty}[(p+1)^2 a_{p+1} - a_p]x^p = 0.$$

Par l'unicité du développement en série entière on déduit que $a_1 = a_0$ et

$$(p+1)^2 a_{p+1} - a_p = 0, \text{ pour tout } p \geq 1.$$

Avec le changement de variable $p+1 = n$ on a

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n. (2 pts)

   Par récurrence sur $n \geq 2$ on a

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)^2}a_{n-2} = \frac{1}{n^2(n-1)^2(n-2)^2\cdots 2^2}a_1$$

   et comme $a_0 = a_1 = 1$ et $n^2(n-1)^2(n-2)^2\cdots 2^2 = (n!)^2$ on obtient

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2}$$

   qui est valable pour tout $n \geq 0$.

4. Calculer le rayon de convergence de la série obtenue. (1,5 pts)

   La série entière obtenue est
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}x^n.$$
   On utilise le critère de D'Alembert

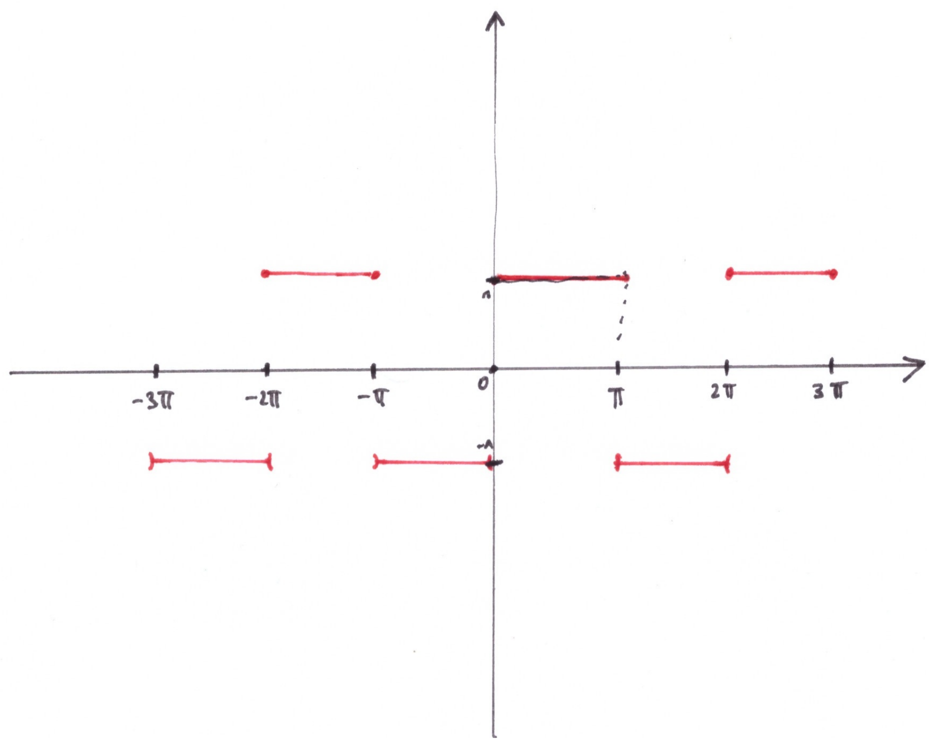
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!^2}\times\frac{n!^2}{1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

   et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

Exercice 2. (9 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{pour } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. (1 pt)



2. Calculer les coefficients de Fourier de f. (3 pts)

   En toute rigueur la fonction f ni paire, ni impaire. Mais étant donné que $f(x) = -f(x)$ pour tout $x \in]-\pi, 0[$ on peut considérer f comme impaire. Rappelons qu'une fonction impaire doit vérifier $f(0) = 0$. On peut vérifier que $a_0 = a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule b_n, $n \geq 1$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{-\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}.$$

3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf. (1 pt)

   Par conséquent, la série de Fourier de f est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}\sin(nx).$$

4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (2 pts)

   La fonction f est continue par morceaux et dirivable par morceaux. Donc d'après le théorème de Dirichlet $f(x) = Sf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où f est continue en x et $Sf(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où f est discontinue en x.

Les points de discontinuité de f sont

$$x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

On a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to x_k^+} f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ -1 & \textit{si } k \textit{ est impair,} \end{cases} \qquad \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \begin{cases} -1 & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ 1 & \textit{si } k \textit{ est impair.} \end{cases}$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{f(x_k^+) + f(x_k^-)}{2} = 0.$$

On conclut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(nx) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \textit{si } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

5. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(2 pts)

On a

$$\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair, } n = 2p, \\ \frac{4}{\pi(2p+1)} & \textit{si } n \textit{ est impair, } n = 2p+1. \end{cases}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(nx) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)x).$$

D'après ce qui précède, pour $x = \pi/2$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(nx) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = f(\pi/2) = 1.$$

Comme

$$\sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(p\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^p,$$

on déduit

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} (-1)^p = 1$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$