CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU 2

(Mercredi 18 novembre 2015)

Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (2 pts)

1. Parmi les applications suivantes, déterminer, sans justifier, celles qui sont des formes quadratiques

$$(1)\ \ q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_1(x,y) = x^2 - y^2, \qquad (2)\ \ q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_2(x,y) = x^2 + 2y,$$

$$(3)\ \ q_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_3(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - xy + yz.$$

(1 pt)

Toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est de la forme*

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

et toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *est de la forme*

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + exy + fyz + gxz$$

où a, b, c, d, e, f, g *sont des constantes réelles. Par conséquent,* (1) *et* (3) *sont des formes quadratiques et* (2) *ne l'est pas.*

2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ? (1 pt)

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

Exercice 1. (7 pts) On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. (2 pts)

   On calcule le polynôme caractéristique

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(1-X)(2-X) = (1-X)^2(2-X).$$

   $P_A(X) = 0$ *ssi* $X = 1$ *ou* $X = 2$. *Donc les valeurs propres de* A *sont* 1 *et* 2 *;* 1 *de multiplicité algébrique* 2 *et* 2 *de multiplicité algébrique* 1.

2. Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A. (2 pts)

   On calcule le sous-espace propre $E_1(A)$ *associé à la valeur propre* 1. *Soit* $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$\vec{u} \in E_1(A) \textit{ ssi } \left\{\begin{array}{c} x = x \\ y = y \\ -y + 2z = z \end{array}\right. \textit{ ssi } \left\{\begin{array}{c} x = x \\ y = y \\ z = y \end{array}\right.$$

   Donc, en posant $x = \alpha$ *et* $y = \beta$ *comme paramètres*

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1).$$

   Donc $E_1(A)$ *est engendré par les vecteurs* $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ *et* $\vec{e}_2 = (0, 1, 1)$. *La famille* $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *constitue une base de* $E_1(A)$ *et la dimension de* $E_1(A)$ *est donc* 2.

   On calcule le sous-espace propre $E_2(A)$ *associé à la valeur propre* 2. *Soit* $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$\vec{u} \in E_2(A) \textit{ ssi } \left\{\begin{array}{c} x = 2x \\ y = 2y \\ -y + 2z = 2z \end{array}\right. \textit{ ssi } \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{array}\right.$$

   Donc, en posant $z = \alpha$ *comme paramètre*

$$(x, y, z) = \alpha(0, 0, 1).$$

   Donc $E_2(A)$ *est engendré par le vecteurs* $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. *La famille* $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_3)$ *constitue une base de* $E_2(A)$ *et la dimension de* $E_2(A)$ *est donc* 1.

3. Justifier pourquoi A est diagonalisable. (1 pt)

   Comme $P_A(X)$ *est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique,* A *est diagonalisable.*

4. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice inversible P vérifiant $A = PDP^{-1}$. (2 pts)

   On pose $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et en posant

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   on a $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (5 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3), \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Calculer la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (1 pt)

   Rappelons qu'en pratique, pour calculer la matrice A, il est inutile de calculer la forme polaire φ_q et $\varphi_q(e_i, e_j)$. Pour retrouver la valeur de $\varphi_q(e_i, e_j)$ il faut se rapeller que c'est le coefficient du terme x_i^2 si $i = j$ et c'est le coefficient du terme x_ix_j divisé par 2 si $i \neq j$ (Voir le cours et la relation entre les coefficients du terme x_ix_j et $\varphi_q(e_i, e_j)$). Donc on a

$$q(x_1, x_2, x_3) = \varphi_q(e_1, e_1)x_1^2 + \varphi_q(e_2, e_2)x_2^2 + \varphi_q(e_3, e_3)x_3^2$$

$$+2\varphi_q(e_1, e_2)x_1x_2 + 2\varphi_q(e_1, e_3)x_1x_3 + 2\varphi_q(e_2, e_3)x_2x_3.$$

   Donc (qui est une matrice symétrique)

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_q(e_1, e_1) & \varphi_q(e_1, e_2) & \varphi_q(e_1, e_3) \\ \varphi_q(e_1, e_2) & \varphi_q(e_2, e_2) & \varphi_q(e_2, e_3) \\ \varphi_q(e_1, e_3) & \varphi_q(e_2, e_3) & \varphi_q(e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale. (3 pts)

   Comme A est symétrique, elle se diagonalise dans une base orthonormée. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 2\sqrt{2} \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-X & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)[(1-X)^2 - (2\sqrt{2})^2] - (1-X) = (1-X)[(1-X)^2 - 9].$$

Donc $P_A(X) = 0$ *ssi* $X = 1$ *ou* $(1-X) = \pm 3$ *ssi* $X = 1$ *ou* $X = -2$ *ou* $X = 4$. *Donc les valeurs propres de* A *sont* 1, -2 *et* 4, *chacune est de multiplicité algébrique* 1.

On calcule maintenant les bases des sous-espaces propres $E_1(A), E_{-2}(1)$ *et* $E_4(A)$. *On a*

$$\vec{u} \in E_1(A) \ ssi \left\{ \begin{array}{c} x + z = x \\ y + 2\sqrt{2}z = y \\ x + 2\sqrt{2}y + z = z \end{array} \right. \quad ssi \left\{ \begin{array}{c} x = -2\sqrt{2}y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc, en posant $y = \alpha$ *comme paramètre*

$$(x, y, z) = \alpha(-2\sqrt{2}, 1, 0).$$

Donc $E_1(A)$ *est engendré par le vecteur* $\vec{u}_1 = (-2\sqrt{2}, 1, 0)$. *La famille* $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}_1)$ *constitue une base de* $E_1(A)$ *et la dimension de* $E_1(A)$ *est donc* 1.

On a

$$\vec{u} \in E_{-2}(A) \ ssi \left\{ \begin{array}{c} x + z = -2x \\ y + 2\sqrt{2}z = -2y \\ x + 2\sqrt{2}y + z = -2z \end{array} \right. \quad ssi \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{1}{3}z \\ y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}z \end{array} \right.$$

Donc, en posant $z = \alpha$ *comme paramètre*

$$(x, y, z) = \alpha(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1).$$

Donc $E_{-2}(A)$ *est engendré par le vecteur* $\vec{u}_2 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1)$. *La famille* $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}_2)$ *constitue une base de* $E_{-2}(A)$ *et la dimension de* $E_{-2}(A)$ *est donc* 1.

On a

$$\vec{u} \in E_4(A) \ ssi \left\{ \begin{array}{c} x + z = 4x \\ y + 2\sqrt{2}z = 4y \\ x + 2\sqrt{2}y + z = 4z \end{array} \right. \quad ssi \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{3}z \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3}z \end{array} \right.$$

Donc, en posant $z = \alpha$ *comme paramètre*

$$(x, y, z) = \alpha(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 1).$$

Donc $E_4(A)$ *est engendré par le vecteur* $\vec{u}_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 1)$. *La famille* $\mathcal{B}_3 = (\vec{u}_3)$ *constitue une base de* $E_4(A)$ *et la dimension de* $E_4(A)$ *est donc* 1.

Comme A *est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. D'après le cours* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *est une base orthogonale formée de vecteurs propres de* A. *Pour obtenir une base orthonormée, on prend*

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{||\vec{u}_1||} = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 0)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{||\vec{u}_2||} = (-\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{||\vec{u}_2||} = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

et donc $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base orthonormée dans laquelle A est représentée par la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Donner l'expression de q dans la base $\mathcal{B}$. La forme polaire φ_q de q définit-elle un produit scalaire ? (1 pt)

   La matrice D est la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$. On a pour tout $\vec{u} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + x'_3\vec{v}_3$
   $$q(x'_1, x'_2, x'_3) = x_1'^2 - 2x_2'^2 + 4x_2'^2$$
   qui est l'expression de q dans la base $\mathcal{B}$. Comme les coefficients (donc les valeurs propres de A) ne sont pas tous strictement positifs, q n'est pas définie positive. Par conséquent, φ_q ne définit pas un produit scalaire.

4. Quelle est la signature et quel est le rang de q ? (1 pt)

   La signature de q est (r, s) où r est le nombre des valeurs propres strictment positives et s est le nombre des valeurs propres strictement négatives. Donc $(r, s) = (2, 1)$. Le rang de q est $r + s = 3$.

Exercice 3. (5 pts) On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{(\sqrt{2}+n)^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad v_n = n^{2015} \sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et dans le cas où elles convergent donner leurs limites. (2 pts)

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}+n)^n} = 0.$$
   Quant à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on calcule un équivalent. On sait que
   $$\sin(x) \sim_0 x$$
   et par conséquent, en remplaçant x par $\frac{1}{\pi^n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on obtient
   $$\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi^n}.$$

D'où

$$n^{2015}\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{2015}}{\pi^n}.$$

Comme les exponentielles ($\pi > 1$) *l'emportent sur les puissances au voisinage de* $+\infty$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2015}}{\pi^n} = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2015}\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right) = 0.$$

Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* 0.

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente. (1 pt)

   On utilise le critère de Cauchy.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}+n)} = 0 < 1$$

   et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est convergente.*

3. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ de terme général $w_n = \frac{n^{2015}}{\pi^n}$ est convergente. (1 pt)

   On utilise le critère de D'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2015}}{\pi^{n+1}} \times \frac{\pi^n}{n^{2015}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015}.$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n})^{2015} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{2015} = 1$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{\pi} < 1$. *Donc la série* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *est convergente.*

4. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente. (1 pt)

   D'après ce qui précède

$$v_n \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{2015}}{\pi^n}.$$

   Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *est à termes positives (car* $\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right) > 0$*), comme* $v_n \sim w_n$ *et comme la série* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *est convergente, on déduit par le critère de comparaison que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *est convergente.*

Exercice 4. Bonus (4 pts) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ où $P_0(X) = 1, P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$. On munit E du produit scalaire

$$(P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale. En déduire une base orthonormée. (2 pts)

   On a

   $$P_0'(X) = P_0''(X) = 0, P_1'(X) = 1, P_1''(X) = 0, P_2'(X) = 2X, P_2''(X) = 2$$

   et

   $$\begin{aligned}
   \langle P_0|P_1\rangle &= P_0(0)P_1(0) + P_0'(0)P_1'(0) + P_0''(0)P_1''(0)\\
   &= 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times 0 = 0\\
   \langle P_0|P_2\rangle &= P_0(0)P_2(0) + P_0'(0)P_2'(0) + P_0''(0)P_2''(0)\\
   &= 1\times 0 + 0\times 0 + 0\times 2 = 0\\
   \langle P_1|P_2\rangle &= P_1(0)P_2(0) + P_1'(0)P_2'(0) + P_1''(0)P_2''(0)\\
   &= 1\times 0 + 0\times 0 + 0\times 2 = 0
   \end{aligned}$$

   et donc $\mathcal{B}$ est une base orthogonale.

   On a

   $$\|P_0\| = \langle P_0|P_0\rangle = P_0(0)^2 + P_0'(0)^2 + P_0''(0)^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

   $$\|P_1\| = \langle P_1|P_1\rangle = P_1(0)^2 + P_1'(0)^2 + P_1''(0)^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

   $$\|P_2\| = \langle P_2|P_2\rangle = P_2(0)^2 + P_2'(0)^2 + P_2''(0)^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4.$$

   Comme $\mathcal{B}$ est orthogonale, il suffit donc de prendre la famille $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, \frac{1}{4}P_2)$ qui est une base orthonormée.

2. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré au plus 1. Soit $p_F : E \to F$ la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F (par rapport au produit scalaire défini plus haut). Soit $R(X) = X^2 + 2X + 1$. Calculer $p_F(R)$. (2 pts)

   Comme p_F est une application linéaire, on a

   $$p_F(R) = p_F(P_2 + 2P_1 + P_0) = p_F(P_2) + 2p_F(P_1) + p_F(P_0)$$

   et comme $P_0, P_1 \in F$, on a

   $$p_F(P_0) = P_0,\ p_F(P_1) = P_1.$$

   Comme $\mathcal{B}$ est orthogonale, P_2 est orthogonale à F et donc $p_F(P_2) = 0$. Par conséquent

   $$p_F(R)(X) = 2X + 1.$$