Corrigé succinct du CC3 du 15 avril 2014

Q1 : (a) $\langle P_1|P_1\rangle = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

$\langle P_1|P_2\rangle = \int_0^1 t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$

$\langle P_2|P_2\rangle = \int_0^1 t^4\,dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$

(b) $\|\lambda P_1\| = |\lambda|\,\|P_1\| = \lambda\sqrt{\langle P_1|P_1\rangle} = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} = 1$ et donc $\lambda = \sqrt{3}$.

(c) $(\sqrt{3}P_1 = b_1)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par P_1. Donc

$$c_1 = \langle P_2|b_1\rangle\cdot b_1 = \sqrt{3}\,\langle P_2|P_1\rangle\cdot\sqrt{3}P_1 = \frac{3}{4}P_1$$

et donc $\mu = \frac{3}{4}$.

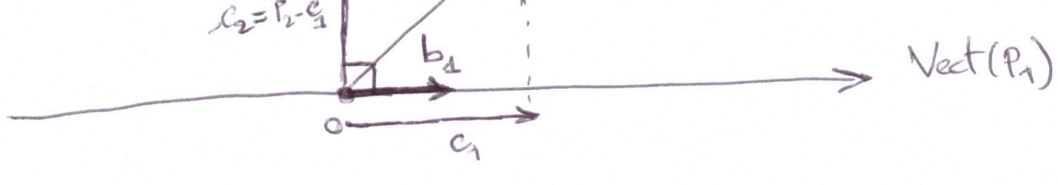
(d) $c_2(t) = P_2(t) - c_1(t) = t^2 - \frac{3}{4}t.$

$$\begin{aligned}\langle P_1|c_2\rangle = \langle P_1|P_2 - c_1\rangle &= \langle P_1|P_2\rangle - \langle P_1|c_1\rangle \\ &= \langle P_1|P_2\rangle - \mu\langle P_1|P_1\rangle \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = 0.\end{aligned}$$

$\langle b_1|c_2\rangle = \langle\lambda P_1|c_2\rangle = \lambda\langle P_1|c_2\rangle = 0$ car $\langle P_1|c_2\rangle = 0$.

(e) On a $b_1 = \lambda P_1$, $c_1 = \mu P_1$ et donc b_1 et c_1 sont colinéaires. Donc $\mathrm{Vect}(b_1, c_1) = \mathrm{Vect}(b_1) = \mathrm{Vect}(P_1) \neq E$. Donc (b_1, c_1) n'est pas une base de E.

La famille (b_1, c_2) est la famille obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base (P_1, P_2). Donc c'est une base orthonormée.



Q2: (a) $x_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(2n-1)}{2}\pi\right) = (-1)^n \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

si $n = 2m$, alors $x_n = x_{2m} = \sin\left(2m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi/2) = -1$

si $n = 2m+1$, alors $x_n = x_{2m+1} = -\sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Donc (x_n) est une suite constante, donc convergente de limite -1.

(b) $|y_n| = \frac{2n}{3n^2+1} \longrightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$.

(c) $\sin\left(\frac{-\pi}{n}\right) \sim_\infty \frac{-\pi}{n}$ et donc $n^2 \sin\left(\frac{-\pi}{n}\right) \sim_\infty -n\pi \longrightarrow -\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Q3 (Bonus) (a) La matrice de q dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans un repère orthonormée $\mathcal{C}$ diagonalisant A, q s'écrit $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A. Donc $\mathcal{E}$ aurait comme équation dans $\mathcal{C}$: $\left(\frac{x'}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}}\right)^2 = 1$

et donc $(a,b) = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)$ ou $(a,b) = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)$.

Calculons λ_1 et λ_2. On a $P_A(X) = X^2 - 8X + 12$ dont les racines sont $X_1 = 2$ et $X_2 = 6$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$ et donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

(b) Pour déterminer $\vec{v}_+$, on calcule un vecteur générateur du sous-espace propre $E_2(A)$.

$\vec{u} = (x,y) \in E_2(A) \iff \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x + y = 0 \end{cases} \iff y = \sqrt{3}x$.

D'où $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$ est une base de $E_2(A)$ et $\vec{v}_+ = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est un vecteur de norme 1 générateur de $E_2(A)$.

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ et donc $\theta = \pi/6$ et

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$