CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU 1

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et L un endomorphisme de E.

1. Définir ce qu'est un sous-espace vectoriel de E.

   Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel, s'il vérifie les deux conditions suivantes :
   - $\vec{0} \in F$,
   - *pour tous* $\vec{u}, \vec{v} \in F$, *pour tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.

2. Définir ce qu'est l'image de L.

   L'image de L est
   $$Im(L) = \{L(\vec{u}) | \vec{u} \in E\}.$$

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par
$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, y + z, x + z).$$

1. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   On a
   $$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 1),\ f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = (1, 1, 0),\ f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1) = (2, 1, 1)$$
   et par conséquent la matrice de f est
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Comme $\det(A) = 0$, *A n'est pas inversible.*

3. Déterminer une base du noyau de f. En déduire le rang de f.

On a

$$Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0).\}$$

Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Alors*

$$\vec{u} \in Ker(f) \text{ si et seulement si } f(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\text{si et seulement si } \left\{ \begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \quad \text{si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = -z \end{array} \right.$$

En posant $z = \lambda$ *où* λ *est un paramètre, on obtient* $x = -\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$,

$$Ker(f) = \{(-\lambda, -\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

et donc Ker(f)=Vect((-1,-1,1)). D'où la famille constituée du vecteur $(-1, -1, 1)$ *constitue une base de* $Kerf(f)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\mathbb{R}^3) = rg(f) + \dim(Ker(f)).$$

D'après la question précédente, $\dim(Ker(f)) = 1$ *et comme* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, *on déduit*

$$rg(f) = 3 - 1 = 2.$$

4. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (2, 3, 3), \vec{u}_3 = (1, 2, 3)$.

Les colonnes de la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ *sont constituées des composantes des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *dans la base* $\mathcal{C}$ *et donc*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, la matrice $P^{-1} = P_{\mathcal{BC}}$.

En utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

D'après la formule vue en cours

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{BC}} M_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{CB}}.$$

Comme $P = P_{\mathcal{CB}}$, $M_{\mathcal{C}}(f) = A$ et $P_{\mathcal{BC}} = P^{-1}$, on a

$$B = M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP.$$

On a

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 16 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 16 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (5 pts) Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = \lambda, \\ x + \lambda y + (\lambda - 2)z = \lambda + 1, \\ x + y + z = 1. \end{array} \right.$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss. La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right).$$

On distingue deux cas : $\lambda - 2 \neq 0$ *et* $\lambda - 2 = 0$.

- *Supposons d'abord* $\lambda - 2 \neq 0$. *Alors, en continuant la méthode du pivot de Gauss,*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\lambda-2} \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda+\frac{1}{\lambda-2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{2}+\frac{1}{2(\lambda-2)} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(\lambda-2)}-\frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{2}+\frac{1}{2(\lambda-2)} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda-(\frac{1}{\lambda-2}-(1-\lambda)) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(\lambda-2)}-\frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{2}+\frac{1}{2(\lambda-2)} \end{array}\right)$$

et dans ce cas le système admet une unique solution

$$x = \frac{\lambda-3}{\lambda-2},\ y = \frac{1-(1-\lambda)(\lambda-2)}{2(\lambda-2)} = \frac{\lambda^2-3\lambda+3}{2(\lambda-2)},\ z = \frac{(1-\lambda)(\lambda-2)+1}{2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda^2+3\lambda-1}{2(\lambda-2)}.$$

- *Supposons maintenant* $\lambda - 2 = 0$. *Alors on obtient la matrice augmentée*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Or de la second ligne on déduit l'équation $0x + 0y + 0z = 1$, *qui est une équation impossible. Par conséquent, dans ca cas, le système n'admet pas de solutions.*

Conclusion :

— *Si* $\lambda = 2$, *le système n'a pas de solutions.*

— *Si* $\lambda \neq 2$, *le système a une solution unique donnée ci-dessus.*