Université Claude Bernard Lyon 1

PCSI L2 UE MATH3

Corrigé du CC2 du 19 novembre 2014 - 2 heures

Les calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints. Aucun document n'est autorisé. Toute réponse doit être justifiée.

Question de cours. (2 pts) Soit (u_n) une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. Donner la définition de ce qui est un voisinage de ℓ. (1 pt)

   Un voisinage de ℓ est un sous-ensemble $V \subseteq \mathbb{C}$ tel que pour tout $a \in V$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que le disque $D(a;\epsilon)$ de centre a et de rayon ϵ soit contenu dans V.

2. Donner le définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. (1 pt)

   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in V$.

Exercice 1. (8 pts) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques. (1 pt)

   On calcule le polynôme caractéristique

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & a & b \\ 0 & 1-X & c \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1-X & c \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X).$$

   Donc les valeurs propres de A sont 1 et 2. La multiplicité algébrique de 1 est 2 ; la multiplicité algébrique de 2 est 1.

2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable. (1 pt)

   On calcule le sous-espace propre $E_1(A)$ associé à la valeur propre 1. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

   $$\vec{u} \in E_1(A) \textit{ ssi } \begin{cases} x + ay + bz = x \\ y + cz = y \\ 2z = z \end{cases} \textit{ ssi } \begin{cases} x = x, ay = 0 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, on déduit que $y = 0$. Donc $\vec{u} = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$ et donc $E_1(A)$ est engendré par $(1, 0, 0)$. Par conséquent $\dim(E_1(A)) = 1$ et donc la multiplicité géométrique de 1 est 1. Comme la multiplicité algébrique est différente de la multiplicité géométrique, A n'est pas diagonalisable.

3. On suppose que $a = 0$.

   (a) Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A. (2 pts)

   En reprenant la calcul de la question précédente si $a = 0$ on a

$$\vec{u} \in E_1(A) \ ssi \ \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

   Donc, en posant $x = \alpha$ et $y = \beta$ comme paramètres

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0).$$

   Donc $E_1(A)$ est engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$. La famille $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ constitue une base de $E_1(A)$ et la dimension de $E_1(A)$ est donc 2.
   On a

$$\vec{u} \in E_2(A) \ ssi \ \begin{cases} x + bz = 2x \\ y + cz = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \ ssi \ \begin{cases} x = bz \\ y = cz \\ z = z \end{cases}$$

   Donc, en posant $z = \alpha$ comme paramètre

$$(x, y, z) = \alpha(b, c, 1).$$

   Donc $E_2(A)$ est engendré par le vecteur (non nul) $\vec{u} = (b, c, 1)$. La famille $\mathcal{B}_2 = (\vec{u})$ constitue une base de $E_2(A)$ et la dimension de $E_2(A)$ est donc 1.

   (b) Justifier pourquoi A est diagonalisable. (1 pt)

   Comme $P_A(X)$ est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique, A est diagonalisable.

   (c) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. (2 pts)

   On pose $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et en posant

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on a $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

On calcule P^{-1} en utilisant la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & b2^n \\ 0 & 1 & c2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b(2^n-1) \\ 0 & 1 & c(2^n-1) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (6 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique dont l'expression analytique dans la base $\mathcal{B}$ est

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

1. Calculer la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ de q dans la base $\mathcal{B}$. (1 pt)

Rappelons qu'en pratique, pour calculer la matrice A, il est inutile de calculer la forme polaire φ_q et $\varphi_q(e_i, e_j)$. Pour retrouver la valeur de $\varphi_q(e_i, e_j)$ il faut se rapeller que c'est le coefficient du terme x_i^2 si $i = j$ et c'est le coefficient du terme x_ix_j divisé par 2 si $i \neq j$ (Voir le cours et la relation entre les coefficients du terme x_ix_j et $\varphi_q(e_i, e_j)$). Donc on a

$$q(x_1, x_2, x_3) = \varphi_q(e_1, e_1)x_1^2 + \varphi_q(e_2, e_2)x_2^2 + \varphi_q(e_3, e_3)x_3^2$$

$$+2\varphi_q(e_1, e_2)x_1x_2 + 2\varphi_q(e_1, e_3)x_1x_3 + 2\varphi_q(e_2, e_3)x_2x_3.$$

Donc (qui est une matrice symétrique)

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_q(e_1,e_1) & \varphi_q(e_1,e_2) & \varphi_q(e_1,e_3) \\ \varphi_q(e_1,e_2) & \varphi_q(e_2,e_2) & \varphi_q(e_2,e_3) \\ \varphi_q(e_1,e_3) & \varphi_q(e_2,e_3) & \varphi_q(e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 4 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les valeurs propres de A. (2 pts)

   On calcule le polynôme caractéristique

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 4-X & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (3-X)\begin{vmatrix} 4-X & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-X \end{vmatrix} - \sqrt{3}\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (3-X)[(4-X)(3-X)-3] - 3(3-X) = (3-X)[(4-X)(3-X)-6]$$

$$= (3-X)(X^2-7X+6) = (3-X)(X-1)(X-6).$$

   Donc les valeurs propres de A sont 1, *3 et* 6, *chacune est de multiplicité algébrique* 1.

3. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale. (2 pts)

   On calcule les bases des sous-espaces propres $E_1(A), E_3(1)$ et $E_6(A)$. On a

$$\vec{u} \in E_1(A) \ ssi \ \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y = x \\ \sqrt{3}x + 4y + \sqrt{3}z = y \\ \sqrt{3}y + 3z = z \end{cases} \ ssi \ \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{3}}{2}y \\ y = y \\ z = \frac{-\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

   Donc, en posant $y = \alpha$ comme paramètre

$$(x,y,z) = \alpha(\frac{-\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-\sqrt{3}}{2}).$$

   Donc $E_1(A)$ est engendré par le vecteur $\vec{u}_1 = (\frac{-\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-\sqrt{3}}{2})$. La famille $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}_1)$ constitue une base de $E_1(A)$ et la dimension de $E_1(A)$ est donc 1.
   On a

$$\vec{u} \in E_3(A) \ ssi \ \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y = 3x \\ \sqrt{3}x + 4y + \sqrt{3}z = 3y \\ \sqrt{3}y + 3z = 3z \end{cases} \ ssi \ \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

   Donc, en posant $z = \alpha$ comme paramètre

$$(x,y,z) = \alpha(-1,0,1).$$

   Donc $E_3(A)$ est engendré par le vecteur $\vec{u}_2 = (-1,0,1)$. La famille $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}_2)$ constitue une base de $E_3(A)$ et la dimension de $E_3(A)$ est donc 1.

On a

$$\vec{u} \in E_6(A) \; ssi \; \left\{ \begin{array}{c} 3x + \sqrt{3}y = 6x \\ \sqrt{3}x + 4y + \sqrt{3}z = 6y \\ \sqrt{3}y + 3z = 6z \end{array} \right. \quad ssi \; \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{\sqrt{3}}y \\ y = y \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}y \end{array} \right.$$

Donc, en posant $y = \alpha$ comme paramètre

$$(x, y, z) = \alpha(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Donc $E_6(A)$ est engendré par le vecteur $\vec{u}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}})$. La famille $\mathcal{B}_3 = (\vec{u}_3)$ constitue une base de $E_6(A)$ et la dimension de $E_6(A)$ est donc 1.
Comme A est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. D'après le cours $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base orthogonale formée de vecteurs propres de A. Pour obtenir une base orthonormée, on prend

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{||\vec{u}_1||} = (\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{5}})$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{||\vec{u}_2||} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{||\vec{u}_2||} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

et donc $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base orthonormée dans laquelle A est représentée par la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Donner l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}'$. Est-ce que q est définie positive ? (1 pt)

La matrice D est la matrice de q dans la base $\mathcal{B}'$. On a pour tout $\vec{u} = x_1'\vec{v}_1 + x_2'\vec{v}_2 + x_3'\vec{v}_3$

$$q(x_1', x_2', x_3') = x_1'^2 + 3x_2'^2 + 6x_2'^2$$

qui est l'expression de q dans la base $\mathcal{B}'$. Comme les coefficients (donc les valeurs propres de A) sont tous strictement positifs, q est définie positive.

Exercice 3. (8 pts) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ où $P_0(X) = 1, P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$. On muni E du produit scalaire

$$(P,Q) \in E^2 \mapsto \langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Calculer $||P_0||$, $\langle P_0|P_1\rangle$, $P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0$ et $||P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0||$. (2 pts)

   On a

$$||P_0|| = \int_0^1 P_0(t)P_0(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$$
$$\langle P_0|P_1\rangle = \int_0^1 P_0(t)P_1(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = [t^2/2]_0^1 = 1/2$$
$$B(X) = (P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0)(X) = X - \frac{1}{2}$$
$$||P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0||^2 = \int_0^1 B(t)^2\,dt = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2\,dt = \frac{1}{12}$$
$$||P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0|| = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

2. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré au plus 1. Soit $Q_1(X) = \sqrt{3}(2X - 1)$. A partir de la base $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1)$, grâce au procédé de Gram-Schmidt, montrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0, Q_1)$ est une base orthonormée de F. (1 pt)

   D'après le procédé de Gram-Schmidt, les vecteurs

$$Q_0 = \frac{P_1}{||P_1||}, \qquad Q_1(X) = \frac{P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0}{||P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0||} = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$$

   constitute une base orthonormée de F. Comme

$$Q_0(X) = P_0(X), \qquad Q_1(X) = \sqrt{3}(2X - 1)$$

   on conclut que $\mathcal{C}$ est une base orthonormée de F.

3. Soit $f : E \to F$ le projecteur orthogonal. Soit $R(X) = X^2$. Calculer $f(R)$.
   [Rappel : Si $F \leq E$ est un sous-espace d'un espace euclidien E, admettant une base orthonormée $(u_1, \cdots, u_p)$, alors la projection orthogonale f sur F est donnée par la formule $f(x) = \langle x|u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle x|u_p\rangle u_p$.] (2 pts)

   On a donc

$$f(R) = \langle R|P_0\rangle P_0 + \langle R|Q_1\rangle Q_1.$$

On a
$$\langle R|P_0\rangle = \int_0^1 R(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$
$$\langle R|Q_1\rangle = \int_0^1 t^2\sqrt{3}(2t-1)\,dt = \sqrt{3}\int_0^1 2t^3 - t^2\,dt = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$
Et donc
$$f(R) = \langle R|P_0\rangle P_0 + \langle R|Q_1\rangle Q_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1$$
$$f(R)(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1(X) = \frac{1}{3} + X - \frac{1}{2} = X - \frac{1}{6}.$$

4. Calculer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$. (1 pts)

   Comme P_0 et P_1 sont des éléments de F on a
$$f(P_0) = P_0,\ f(P_1) = P_1$$
   et d'après ce qui précède
$$f(P_2)(X) = X - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}P_0(X) + P_1(X).$$
   D'où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. L'endomorphisme f est-il symétrique ? Peut-on le diagonaliser dans une base orthonormée ? (1 pt)

   La matrice A n'est pas symétrique et par conséquent f n'est pas symétrique. On ne peut diagonaliser f dans une base orthonormée car sinon f serait symétrique.

Exercice 4. Bonus (4 pts) Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation
$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ dans laquelle l'équation de $\mathcal{C}$ est (3 pts)
$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - 1 = 0.$$
   La forme quadratique associée à $\mathcal{C}$ est

$$q(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons les valeurs propres de A*. On a*

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - \frac{1}{4}.$$

On a $P_A(X) = 0$ *si et seulement si* $(1-X) = \pm\frac{1}{2}$ *si et seulement si* $X = \frac{1}{2}$ *ou* $X = \frac{3}{2}$*. Donc les valeurs propres de* A *sont* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{3}{2}$*.*
On sait que A *est diagonalisable (*A *est symétrique) dans une base orthonormée* $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ *formée de vecteurs propres ; avec* $\vec{u}$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* $\frac{1}{2}$ *et* $\vec{v}$ *associé à la valeur propre* $\frac{3}{2}$*. En plus dans la base* $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ *la forme quadratique* q *a comme expression*

$$q(x', y') = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2$$

et donc l'équation de $\mathcal{C}$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *est*

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - 1 = 0.$$

2. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$? (1 pt)

L'équation précédente est l'équation d'une ellipse et par conséquent $\mathcal{C}$ *est une ellipse.*