Feuille 1 : Exercices sur les systèmes linéaires, quelques corrections

Exercice 1, b)
Soit

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{array}\right.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y=0 & \\ -y=1 & (L_2 \leftarrow L_2-2L_1) \\ y=-1 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y=0 & \\ -y=1 & \\ 0=0 & (L_3 \leftarrow L_3+L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y \\ y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

L'unique solution de (S) est donc $(x,y)=(1,-1)$: $\mathcal{S}=\{(1,-1)\}$. Le système a 2 inconnues principales (x et y) et aucune inconnue secondaire. Le rang du système (= son nombre d'inconnues principales) est 2.

Exercice 1, e)
Soit

$$(S)\left\{\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ -4x+2y+z=3 \\ -2x+y+4z=4 \\ 10x-5y-6z=-10 \end{array}\right.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x-y+3z=1 & \\ 7z=5 & (L_2 \leftarrow L_2+2L_1) \\ 7z=5 & (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \\ -21z=-15 & (L_4 \leftarrow L_4-5L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x-y+3z=1 & \\ 7z=5 & \\ 0=0 & (L_3 \leftarrow L_3-L_2) \\ 0=0 & (L_4 \leftarrow L_4+3L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ 7z=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=y-3z+1 \\ z=\frac{5}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=y-\frac{8}{7} \\ z=\frac{5}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{y}{2}-\frac{4}{7} \\ z=\frac{5}{7} \end{array}\right.$$

Ainsi il y a deux inconnues principales (x et z) et une inconnue secondaire (y). Le rang du système est donc 2. Les solutions de (S) sont les $(x,y,z) = (-\frac{4}{7} + \frac{y}{2}, y, \frac{5}{7})$ pour $y \in \mathbb{K}$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{4}{7} + \frac{y}{2}, y, \frac{5}{7} \right),\ y \in \mathbb{K} \right\}$$

(droite).

Exercice 1, h)
Soit

$$(S) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z + t = 0 & \\ -t = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ -t = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ 2t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 & \\ -t = 0 & \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z - t \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ t = 0 \end{cases}$$

Ce système a deux inconnues principales (x et t), et deux inconnues secondaires (y et z), son rang est donc 2. Les solutions de (S) sont les $(x,y,z,t) = (y - z, y, z, 0)$ pour $y, z \in \mathbb{K}$:

$$\mathcal{S} = \{(y - z, y, z, 0),\ y, z \in \mathbb{K}\} = \{(1,1,0,0)y + (-1,0,1,0)z,\ y, z \in \mathbb{K}\} \text{ (plan).}$$

Exercice 2, c)
On considère le système

$$(S) = \begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m - 1 \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + 2z = m & \\ (2m+1)y + (m+2)z = 2m + 1 & (L_2 + 2L_1) \\ (1 - m^2)y + 2(1-m)z = 2m - 1 - m^2 & (L_3 - mL_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + 2z = m \\ (2m+1)y + (m+2)z = 2m + 1 \\ (1-m)(1+m)y + 2(1-m)z = -(1-m)^2 \end{cases}$$

On remarque que $(1 - m)$ est en facteur partout dans L_3. On a donc envie de diviser cette ligne par $(1 - m)$. Pour avoir le droit d'effectuer cette opération, il faut que $(1 - m) \neq 0$, c'est à dire que $m \neq 1$. On commence donc une discussion sur la valeur de m.

1. Si $m=1$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3y+3z=3 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y-2z=-z \\ y=1-z \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S}=\{(-z,1-z,z),\ z\in\mathbb{K}\}$ (droite).

2. Si $m\neq 1$, on peut diviser L_3 par $(1-m)$, et

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+my+2z=m \\ (2m+1)y+(m+2)z=2m+1 \\ (1+m)y+2z=m-1 \end{cases}$$

On échange L_2 et L_3 pour avoir dans la deuxième ligne au moins un coefficient indépendant de m (qui sera le 2 de $2z$), puis on continue le pivot en éliminant les z de la dernière ligne à l'aide de L_2 :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+my+2z=m \\ 2z+(1+m)y=m-1 \\ (m+2)z+(2m+1)y=2m+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+my+2z=m \\ 2z+(1+m)y=m-1 \\ (4m+2-(m+2)(m+1))y=4m+2-(m+2)(m-1) \quad (2L_3-(m+2)L_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+my+2z=m \\ 2z+(1+m)y=m-1 \\ (-m^2+m)y=-m^2+3m+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+my+2z=m \\ 2z+(1+m)y=m-1 \\ m(1-m)y=-(m+1)(m-4) \end{cases} \end{aligned}$$

(en effet, on touve que les racines de $-m^2+3m+4$ sont -1 et 4).

(a) Si $m=0$, alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=4 \end{cases},$$

la dernière ligne est absurde et le système est incompatible : $\mathcal{S}=\emptyset$.

(b) Si $m\neq 0$, on peut diviser par m (et par $1-m$ puisque $m\neq 1$), de sorte que

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+my+2z=m \\ 2z+(1+m)y=m-1 \\ y=\frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x+my+2z=m \\ 2z=\frac{8m+4}{m(m-1)} \\ y=\frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)} \\ z=\frac{4m+2}{m(m-1)} \\ y=\frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)} \end{cases}, \end{aligned}$$

et $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)},\frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)},\frac{4m+2}{m(m-1)}\right)\right\}$ (point).

Conclusion :

1. Si $m = 1$, $\mathcal{S} = \{(-z, 1-z, z),\ z \in \mathbb{K}\}$ (droite).
2. Si $m = 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
3. Sinon ($m \neq 0$ et $m \neq 1$), le système est de Cramer et $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)}, \frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)}, \frac{4m+2}{m(m-1)} \right) \right\}$ (point).

Exercice 3, a)

$$(S) = \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss. On commence par effectuer une permutation des lignes, de manière à avoir un pivot égal à 1.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ (L_2 \leftarrow L_2 - aL_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1-a \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \end{cases}$$

On constate que les coefficients de y dans L_2 et L_3 sont opposés. On remplace donc L_3 par $L_3 + L_2$, ce qui donne :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1-a \\ \left[(1-a) + (1-a)(1+a)\right] z = b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1-a \\ (1-a)(2+a)z = b-a \end{cases}$$

Pour calculer z, il faudrait diviser par $(1-a)(2+a)$, ce qui n'est possible que si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ (division par zéro interdite !). On doit donc distinguer plusieurs cas :

1. *Si $a = 1$:* alors
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b-1 \end{cases}$$
   (a) *Si $b \neq 1$* , la deuxième ligne est absurde et le système est incompatible : $\mathcal{S} = \emptyset$.
   (b) *Si $b = 1$*,
$$(S) \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z,$$
   d'où $\mathcal{S} = \{(1-y-z, y, z),\ y, z \in \mathbb{K}\}$ (plan).
2. *Si $a = -2$:* alors
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ 3by - 3z = 3 \\ 0 = b+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ by - z = 1 \\ 0 = b+2 \end{cases}$$
   (a) *Si $b \neq -2$* alors la dernière ligne est absurde et $\mathcal{S} = \emptyset$.

(b) *Sinon,* $b = 2$ et

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 2z = 1 \\ -2y - z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2y + 2z + 1 = \cdots = z \\ y = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Alors $\mathcal{S} = \{(z, -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}, z),\ z \in \mathbb{K}\}$ (droite).

3. *Si* $a \neq 1$ *et* $a \neq -2$, on peut diviser par $(1-a)(2+a)$ et par $(1-a)$, d'où

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + by + az = 1 \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1 - a \\ z = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2/(1-a)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x + by + az = 1 \\ by + (1+a)z = 1 \\ z = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + by + az = 1 \\ by = 1 - (1+a)z = \cdots = \frac{2-b-ab}{(1-a)(2+a)} \\ z = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \end{array} \right.$$

Pour obtenir y, il faut maintenant diviser L_2 par b, ce qui n'est possible que si $b \neq 0$.

(a) *Si* $b = 0$ alors

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + az = 1 \\ 0 = \frac{2}{(1-a)(2+a)} \\ z = \frac{-a}{(1-a)(2+a)} \end{array} \right.$$

Mais la deuxième ligne de ce système est absurde donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

(b) *Sinon,* $b \neq 0$ et on peut diviser par b, ce qui donne

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + by + az = 1 \\ y = \frac{2-b-ab}{b(1-a)(2+a)} \\ z = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - by - az = \cdots = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \\ y = \frac{2-b-ab}{b(1-a)(2+a)} \\ z = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \end{array} \right.$$

Et dans ce cas, le système est de Cramer et $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{b-a}{(1-a)(2+a)}, \frac{2-b-ab}{b(1-a)(2+a)}, \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \right) \right\}$.

Conclusion :

1. Si $a = b = 1$, $\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z),\ y, z \in \mathbb{K}\}$ (plan),
2. si $a = 1$ et $b \neq 1$, $\mathcal{S} = \emptyset$,
3. si $a = b = -2$, $\mathcal{S} = \{(z, -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}, z),\ z \in \mathbb{K}\}$ (droite),
4. si $a = -2$ et $b \neq -2$, $\mathcal{S} = \emptyset$,
5. Si $b = 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$,
6. Sinon, ($a \neq 1$, $a \neq -2$ et $b \neq 0$), $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{b-a}{(1-a)(2+a)}, \frac{2-b-ab}{b(1-a)(2+a)}, \frac{b-a}{(1-a)(2+a)} \right) \right\}$.

Exercice 3, b)

$$(S) = \left\{\begin{array}{l} ax-by+t=a \\ bx+ay+z=b \\ y+az-bt=a \\ x+bz+at=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+bz+at=b \\ y+az-bt=a \\ bx+ay+z=b \\ ax-by+t=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+bz+at=b & \\ y+az-bt=a & \\ ay+(1-b^2)z-abt=b(1-b) & (L_3-bL_1) \\ -by+(1-a^2)t-abz=a(1-b) & (L_4-aL_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+bz+at=b & \\ y+az-bt=a & \\ (1-a^2-b^2)z=b-b^2-a^2 & (L_3-aL_2) \\ (1-a^2-b^2)t=a & (L_4+bL_2) \end{array}\right.$$

1. Si $a^2+b^2=1$, $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+bz+at=b \\ y+az-bt=a \\ 0=b-1 \\ 0=a \end{array}\right.$
   (a) Si $a \neq 0$ ou $b \neq 1$, $\mathcal{S}=\emptyset$,
   (b) Sinon ($a=0$ et $b=1$), $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=1 \\ y-t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-z \\ y=t \end{array}\right.$, et $\mathcal{S}=\{(1-z,t,z,t),(z,t)\in\mathbb{K}^2\}$ (plan).
2. Sinon ($a^2+b^2 \neq 1$),

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x= \\ y+az-bt=a \\ z=\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2} \\ t=\frac{a}{1-a^2-b^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2} \\ y=\frac{a}{1-a^2-b^2} \\ z=\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2} \\ t=\frac{a}{1-a^2-b^2} \end{array}\right.,$$

   et $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2},\frac{a}{1-a^2-b^2},\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2},\frac{a}{1-a^2-b^2}\right)\right\}$ (point).

Conclusion :

1. Si $a=0$ et $b=1$, $\mathcal{S}=\{(1-z,t,z,t),(z,t)\in\mathbb{K}^2\}$ (plan).
2. Si $a^2+b^2=1$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 1$, $\mathcal{S}=\emptyset$.
3. Si $a^2+b^2\neq 1$, $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2},\frac{a}{1-a^2-b^2},\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2},\frac{a}{1-a^2-b^2}\right)\right\}$ (point).