Correction de la question 1 de l'exercice 3 du TD 3.

Pour résoudre le système (S_1), on commence par le simplifier en échelonnant et réduisant la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & (\lambda-1) & | & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Détaillons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & (\lambda-1) & | & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \lambda+1 \\ 0 & (1-\lambda) & -1 & | & -\lambda^2 \\ 0 & (\lambda-1) & 0 & | & -\lambda \end{pmatrix}$$

On cherche à présent dans la deuxième ligne un pivot qui soit dans la deuxième colonne : si $\lambda \neq 1$, $(1-\lambda)$ est un tel pivot. On suppose donc dans un premier temps que $\lambda \neq 1$. On continue :

$$\longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 \times (1/(1-\lambda))} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \lambda+1 \\ 0 & 1 & 1/(\lambda-1) & | & \lambda^2/(\lambda-1) \\ 0 & (\lambda-1) & 0 & | & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda-1)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \lambda+1 \\ 0 & 1 & 1/(\lambda-1) & | & \lambda^2/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & -1 & | & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \lambda+1 \\ 0 & 1 & 1/(\lambda-1) & | & \lambda^2/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & | & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1/(\lambda-1)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -\lambda^2+1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\lambda/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & | & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\lambda^2+1+\lambda/(\lambda-1) \\ 0 & 1 & 0 & | & -\lambda/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & | & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$

On résout alors le système équivalent associé suivant :

$$\begin{cases} x & = -\lambda^2+1+\lambda/(\lambda-1) \\ y & = -\lambda/(\lambda-1) \\ z & = \lambda^2+\lambda \end{cases}$$

Ce qui nous donne directement une unique solution au système (dans le cas où $\lambda \neq 1$).

Traitons à présent le cas où $\lambda = 1$: on remplace dans la matrice augmentée du système, λ par 1, ce qui nous donne la matrice augmentée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

On échelonne et on réduit : détaillons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

(On voit dès lors qu'il n'y a pas de solution avec la troisième ligne mais continuons la méthode de Gauss pour s'entraîner)

$$\longrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

On résout alors le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ z & = 1 \\ 0 & = -1 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc (S1) n'a pas de solution (dans le cas où $\lambda = 1$).

Notons que l'on peut remplacer λ par 1 directement dans la dernière matrice avant le choix de considérer en premier lieu le cas $\lambda \neq 1$, à savoir :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \lambda + 1 \\ 0 & (1 - \lambda) & -1 & | & -\lambda^2 \\ 0 & (\lambda - 1) & 0 & | & -\lambda \end{pmatrix}$$

ce qui évite de refaire, pour $\lambda = 1$, la manipulation "$\longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}$" qui est valable pour n'importe quelle valeur de λ.