CONTRÔLE CONTINU FINAL

Mercredi 07 janvier 2015

Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (3 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. (1 pt)
2. Déterminer une base orthonormée dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale. (2 pts)

Exercice 2. (3 pts)

1. Étudier la convergence de la série numérique de terme général donné pour tout $n \geq 1$ par
$$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sin(n)}{\ln(n+1) + n^3}.$$
(1 pt)
2. Montrer que la série numérique suivante est convergente et calculer sa somme :
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}.$$
(2 pts)

Exercice 3. (4 pts)

I. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On pose $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$ et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. (1 pt)
2. Soit $Q(X) = X^2 + X + 1$. Calculer les composantes de Q dans la base $\mathcal{B}$. (1 pt)

II. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où

$$a_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

1. Calculer son rayon de convergence. (1 pt)
2. Calculer sa somme (Utiliser la question I.2). (1 pt)

Exercice 4. (5 pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - xy' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1. (1 pt)
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence
$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$
(2 pts)
3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. (1 pt)
4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence. (1 pt)

Exercice 5. (5 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. (0,5 pt)
2. Calculer les coefficients de Fourier de f. (2 pts)
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1 pt)
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes
$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$
(1,5 pts)