Corrigé du CONTROLE FINAL du 3/06/2014, durée 2 heures

Exercice 1 [3.5 pts] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$.

1. Pour quelles valeurs de α la suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=1}^\infty u_n$ est-elle convergente ?
3. La série $\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+n}\right)$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Corrigé

1. Si $\alpha > 0$ la suite $(u_n)_n$ converge vers 0. Si $\alpha = 0$ la suite $(u_n)_n$ converge vers 1. Si $\alpha < 0$ la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$. Donc on a convergence pour $\alpha \geq 0$.
2. Selon le critère de Riemann, la série $\sum_{n=1}^\infty u_n$ est convergente ssi $\alpha > 1$.
3. On a $0 \leq \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+n}\right) \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. D'après le critère de Riemann, la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente. Donc aussi la série $\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+n}\right)$ est convergente.

Exercice 2 [4 pts]

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Soit $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ une série entière et $0 < q < 1$. On suppose que $a_0 \neq 0$ et que
$$a_n \frac{\sqrt{n^2q^2+1}}{n} \leq a_{n+1} \leq a_n \, n \sin\left(\frac{q}{n}\right).$$
Quel est le rayon de convergence de la série ?

Corrigé

1. Si la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est convergente pour tout z alors le rayon de convergence est $R = +\infty$. Si la série est divergente pour tout $z \neq 0$ alors le rayon de convergence est $R = 0$. Dans les autres cas le rayon de convergence de la série entière est le nombre R tel que la série est convergente pour $|z| < R$ et divergente pour $|z| > R$.
2. On utilise le théorem des gendarmes. On a :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2q^2+1}}{n} = q$$
et
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{q}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d}{dn}\sin\left(\frac{q}{n}\right)}{\frac{d}{dn}\frac{1}{n}} = q$$
et alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Du coup $R = q^{-1}$.

Exercice 3 [8 pts] On considère $C^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions infiniment dérivables avec l'application $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ donnée par
$$L(f)(x) = f'(x) + xf(x).$$

1. Montrer que L est linéaire.

2. Trouver la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui est solution de l'équation différentielle

$$f'(x) = -xf(x)$$

qui satisfait $f(0) = 1$.

3. Quel est le rayon de convergence de la série trouvée en 2 ?
4. On admet que toute solution de l'equation différentielle de 2 s'écrit sous forme d'une série entière. Quelle est la dimension du noyeau $\ker L$ de L ?

Corrigé

1. Soient f, g deux fonctions et $c \in \mathbb{R}$.

$$L(cf+g)(x) = (cf+g)'(x) + x(cf+g)(x) = cf'(x) + g'(x) + cxf(x) + xg(x) = cL(f) + L(g).$$

2. On rentre avec $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dans l'équation différentielle. Vu que $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (on peut dériver terme par terme) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

On a $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^m$. Donc

$$0 + a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \big((m+1)a_{m+1} + a_{m-1})x^m\big) = 0.$$

Comparaison des coefficients donne : $a_1 = 0$ et

$$a_{m+1} = -\frac{a_{m-1}}{m+1}.$$

On obtient alors $a_n = 0$ si n est impair et $a_{2(n+1)} = -\frac{a_{2n}}{2(n+1)}$ ce qui donne

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0.$$

De plus $f(0) = a_0 = 1$. La solution est donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}.$$

3. On observe que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-x^2}{2}\right)^n$ et applique le critère d'Alembert à la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n$. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

le rayon de convergence est $R = +\infty$.
D'une manière alternative, on pourrait appliquer le critère de Cauchy aux coefficients a_n et obtenir $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n!^{\frac{1}{n}}} = 0$.
On remarque que la somme de la série est $f(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$.

4. Clairement, $f \in \ker L$ ssi f satisfait l'equation différentielle de 2. Vu que toote solution de l'equation différentielle de 2 s'écrit sous la forme d'une série entière une telle solution s'ècrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{2^n n!} x^{2n}$$

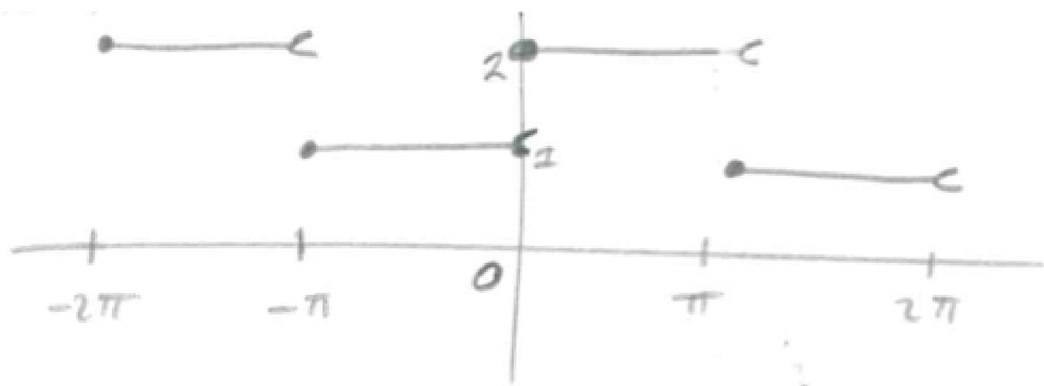
où $a_0 \in \mathbb{R}$, un paramètre libre. Toute solution est donc un multiple de la solution avec $a_0 = 1$. Donc la dimension de $\ker L$ est 1.

Exercice 4 [6 pts] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, donnée sur $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
3. En déduire la série de Fourier de f. On notera $Sf(x)$ la somme de cette série. Quelle est la valeur de $Sf(2\pi)$?
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$?

Corrigé



1.
2.

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}(\pi + 2\pi) = \frac{3}{2}$$

$$n \geq 1, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T/2} f(t)cos(nt)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)dt + \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nt)dt = 0$$

$$n \geq 1, \quad b_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)dt + \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nt)dt = 0 + \frac{-1}{n}\cos(nt)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$$

3. La série de Fourier de f est :

$$\begin{aligned} Sf(x) &= a_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \\ &= \frac{3}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi n}(1 + (-1)^{n+1})\ \sin(nx) = \frac{3}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{2}{\pi(2n+1)}\ \sin((2n+1)x) \end{aligned}$$

$\sin((2n+1)2\pi) = 0 \Longrightarrow Sf(2\pi) = \frac{3}{2}$

4. $f(x)$ est discontinue pour $x = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow Sf(x) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}/\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$