Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Algèbre I - Structures fondamentales

CONTRÔLE FINAL

5 janvier 2016 — durée 2 h

Corrigé

Exercice 1.

On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante : $F_1 = F_2 = 1$ et $\forall n \geq 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Démontrer que $\forall n \geq 1, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Solution. Montrons cette proposition par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1^2 = 1 = F_1 \cdot F_2.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n+1}) \cdot F_{n+1} = F_{n+2} \cdot F_{n+1} = F_{n+1} \cdot F_{(n+1)+1}$$

et l'égalité est donc vérifiée pour $n + 1$.

On en déduit par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Exercice 2.

Soient $\alpha = \mathrm{e}^{i\pi/5}$ et $\omega = \alpha^2$.

1. Calculer α^5 et ω^5.
2. Démontrer la relation $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
3. Développer et simplifier l'expression $A = \alpha^5\big(\alpha + \alpha^{-1}\big)\big(\alpha^2 + \alpha^{-2}\big)$.
4. En déduire la relation : $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}$.

Solution.

1. On a :
$$\alpha^5 = (\mathrm{e}^{i\pi/5})^5 = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \quad \textit{et} \quad \omega^5 = (\mathrm{e}^{i\pi/5})^{10} = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1.$$
2. Il s'agit de la somme des 5 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$:
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0.$$

   (Autre solution : cette somme est nulle car c'est la somme des racines 5^{es} de l'unité.)

3. On a :
$$A = \alpha^5\big(\alpha+\alpha^{-1}\big)\big(\alpha^2+\alpha^{-2}\big) = \alpha^5\big(\alpha^3+\alpha^{-1}+\alpha+\alpha^{-3}\big) = \alpha^8+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^2 = \omega^4+\omega^2+\omega^3+\omega = -1$$
4. Remarquons que $\alpha + \alpha^{-1} = \mathrm{e}^{i\pi/5} + \mathrm{e}^{-i\pi/5} = 2\cos\frac{\pi}{5}$ d'après la formule d'Euler. On a de même : $\alpha^2 + \alpha^{-2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. Ainsi,
$$A = -\big(2\cos\frac{\pi}{5}\big)\big(2\cos\frac{2\pi}{5}\big) = -4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$ et on conclut avec la question précédente.

Exercice 3.

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour un complexe z par : $f(z) = (1+i)z + i$.
1. Déterminer le ou les points fixes de f.
2. Déterminer $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout z complexe, on ait : $f(z) = r\,\mathrm{e}^{i\theta}(z+1) - 1$.
3. Exprimer f comme composée d'une rotation et d'une homothétie ayant le même centre.

Solution.
1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a $f(\omega) = \omega$ ssi $\omega = (1+i)\omega + i$ ssi $i\omega = -i$ ssi $\omega = -1$. La fonction f a donc pour unique point fixe -1.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $f(z) = (1+i)(z+1) - (1+i) + i = (1+i)(z+1) - 1$. Or $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1 + i = \sqrt{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$, donc $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \pi/4$ conviennent.
3. D'après la question précédente, f est la composée de la rotation r d'angle $\pi/4$ et de centre -1, et de l'homothétie h de rapport $\sqrt{2}$ et de même centre. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\begin{aligned} r \circ h(z) &= r\big(\sqrt{2}(z+1) - 1\big) \\ &= \mathrm{e}^{i\pi/4}\Big(\big(\sqrt{2}(z+1) - 1\big) + 1\Big) - 1 \\ &= \mathrm{e}^{i\pi/4}\sqrt{2}(z+1) - 1 = f(z). \end{aligned}$$

Exercice 4.
1. (Question de cours) Énoncer l'identité de Bézout.
2. Calculer le PGCD de 222 et 117.
3. Trouver un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $222\,x_0 + 117\,y_0 = 6$.
4. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $222\,x + 117\,y = 6$.

Solution.
1. Soient a et b deux entiers non tous deux nuls. Alors, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = \mathrm{PGCD}(a, b)$.
2. Calculons le PGCD de 222 et 117 en utilisant l'algorithme d'Euclide :
$$\begin{aligned} 222 &= 117 + 105 \\ 117 &= 105 + 12 \\ 105 &= 8 \times 12 + 9 \\ 12 &= 9 + 3 \\ 9 &= 3 \times 3. \end{aligned}$$
On a donc : $\mathrm{PGCD}(222, 117) = 3$.

3. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} 3 &= 12-9 = 12-(105-12\times 8) = 12\times 9-105 = (117-105)\times 9-105 \\ &= 117\times 9-105\times 10 = 117\times 9-(222-117)\times 10 = 222\times(-10)+117\times 19. \end{aligned}$$

   On multiplie cette équation par 2 et on obtient $6 = 222\times(-20)+117\times 38$.
   Ainsi, le couple $(-20, 38)$ est une solution particulière de $222\,x+117\,y=6$.

4. Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant $222\,x+117\,y=6$. Alors, $222\,(x+20)+117\,(y-38)=0$ et en simplifiant par 3, on a

$$74\,(x+20)+39\,(y-38)=0.$$

   En particulier 39 divise $74\,(x+20)$. Comme 39 et 74 sont premiers entre-eux, le lemme Gauss entraîne que 39 divise $(x+20)$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+20=39k$. Par l'équation précédente, on a également $y-38=-74k$, et ainsi $(x,y)=(39k-20, 38-74k)$. Réciproquement, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a $74\,(39k-20)+39\,(38-74k) = 74\times(-20)+39\times 38$, et en multipliant par 3,

$$222\,(39k-20)+117\,(38-74k) = 222\times(-20)+117\times 38 = 6.$$

   L'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $222\,x+117\,y=6$ est donc l'ensemble

$$\big\{(39k-20, 38-74k)\ :\ k\in\mathbb{Z}\big\}.$$

Exercice 5.

On note $\beta=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application définie pour tout $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par

$$p(u)=p(x,y)=\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\right).$$

1. Démontrer que p est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice P de p dans la base canonique et montrer que p est une projection.
3. Déterminer un vecteur directeur de $\ker(p)$ et un vecteur directeur de $\mathrm{im}(p)$.
4. Soient $u_1=(1,1)$ et $u_2=(1,-2)$. Montrer que $\beta'=(u_1,u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de p dans la base β'.

Solution.

1. Soient $v_1=(x_1,y_1)$ et $v_2=(x_2,y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et λ un réel. On a

$$\begin{aligned} p(v_1+\lambda v_2) &= p(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2) \\ &= \left(\frac{2}{3}(x_1+\lambda x_2)+\frac{1}{3}(y_1+\lambda y_2), \frac{2}{3}(x_1+\lambda x_2)+\frac{1}{3}(y_1+\lambda y_2)\right) \\ &= \left(\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}y_1\right)+\lambda\left(\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}y_2\right), \left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}y_1\right)+\lambda\left(\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}y_2\right)\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}y_1, \frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}y_1\right)+\lambda\left(\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}y_2, \frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}y_2\right) \\ &= p(v_1)+\lambda p(v_2). \end{aligned}$$

L'application p est donc linéaire.

(Autres solutions : [1] On montre que $p(v_1+v_2)=p(v_1)+p(v_2)$ et $p(\lambda v_1)=\lambda p(v_1)$ pour tous v_1, v_2 de $\mathbb{R}^2$ et tout λ réel. [2] On montre que $p(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)=\lambda_1 p(v_1)+\lambda_2 p(v_2)$ pour tous v_1, v_2 de $\mathbb{R}^2$ et tous λ_1, λ_2 réels. [3] Par définition de p, il existe des réels a, b, c et d tels que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $p(x,y)=(ax+by, cx+dy)$, ce qui, d'après le cours, caractérise les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.)

2. $p(e_1)=p(1,0)=(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ et $p(e_2)=p(0,1)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, et la matrice de p dans la base canonique est donc

$$P=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On a

$$P^2=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}=P.$$

Ainsi $p^2=p$, et p est donc une projection (p n'étant ni l'application nulle, ni l'application identité).

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a $(x,y)\in\ker(p)$ si et seulement si $p(x,y)=(0,0)$ si et seulement si $(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y)=(0,0)$ si et seulement $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=0$ si et seulement si $2x+y=0$. Le noyau de p est donc la droite vectorielle d'équation $2x+y=0$, qui a par exemple pour vecteur directeur $(1,-2)$.

Soit $(x',y')\in\mathbb{R}^2$. On a $(x',y')\in\operatorname{im}(p)$ si et seulement s'il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $p(x,y)=(x',y')$ si et seulement s'il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=x'$ et $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=y'$ si et seulement s'il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x'=y'$ et $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=x'$ si et seulement si $x'=y'$.

L'image de p est donc la droite vectorielle de vecteur directeur $(1,1)$.

(Autre solution : p étant une projection, on sait que son noyau et son image sont des droites vectorielles. Remarquons que $p(1,-2)=(0,0)$, donc $(1,-2)$ est un des vecteurs directeurs de $\ker(p)$. Par ailleurs, $p(1,0)=(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ est un vecteur non nul de l'image de p, donc l'un de ces vecteurs directeurs.)

4. Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

$p(u_1)=p(1,1)=(1,1)=u_1$ et $p(u_2)=p(1,-2)=\vec{0}$. Ainsi, $p(u_1)$ et $p(u_2)$ ont respectivement pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dans la base β'. La matrice de p dans cette base vaut donc $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.