Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Algèbre I - Structures fondamentales

CONTRÔLE FINAL

5 janvier 2016 — durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1.

On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_1 = 1, \\ F_2 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}. \end{cases}$$

Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Exercice 2.

Soient $\alpha = \mathrm{e}^{i\pi/5}$ et $\omega = \alpha^2$.

1. Calculer α^5 et ω^5.
2. Démontrer la relation
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0.$$
3. Développer et simplifier l'expression
$$A = \alpha^5\big(\alpha + \alpha^{-1}\big)\big(\alpha^2 + \alpha^{-2}\big).$$
4. En déduire la relation :
$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 3.

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour un complexe z par :

$$f(z) = (1+i)z + i.$$

1. Déterminer le ou les points fixes de f.
2. Déterminer $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout z complexe, on ait :
$$f(z) = r\,\mathrm{e}^{i\theta}(z+1) - 1.$$
3. Exprimer f comme composée d'une rotation et d'une homothétie ayant le même centre.

Exercice 4.

1. (Question de cours) Énoncer l'identité de Bézout.
2. Calculer le PGCD de 222 et 117.
3. Trouver un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $222\,x_0 + 117\,y_0 = 6$.
4. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $222\,x + 117\,y = 6$.

Exercice 5.

On note $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$p(u) = p(x, y) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right).$$

1. Démontrer que p est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice P de p dans la base canonique et montrer que p est une projection.
3. Déterminer un vecteur directeur de $\ker(p)$ et un vecteur directeur de $\operatorname{im}(p)$.
4. Soient $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -2)$. Montrer que $\beta' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de p dans la base β'.