Algèbre I : Structures fondamentales
Semestre automne 2015-2016

Licence STS Portail Maths/Info
Université Claude Bernard - Lyon 1

Feuille n° 7

Quelques exercices supplémentaires sur les nombres complexes.

Exercice 1.

1. Donner les applications qui représentent dans le plan complexe les transformations suivantes :
   (a) La translation de vecteur d'affixe $-2+i$.
   (b) La rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre 1.
   (c) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1+2i$.
2. Identifier les transformations complexes suivantes :
   (a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z+3-2i$
   (b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{\frac{i2\pi}{7}} z$
   (c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 1 - i\sqrt{3}$
   (d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 3z-5+i$

Exercice 2. Sot $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto -z-2i$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \to 2z-1-i$ deux transformations du plan complexe.

1. Déterminer les points fixes de f et g.
2. Montrer que f et g sont deux homothéties dont on donnera le centre et le rapport.
3. Montrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.
4. Montrer que ces trois centres sont alignés.

Exercice 3. Sot $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (\sqrt{3}+i)z$. Déterminer une homothétie h telle que $h \circ f$ soit une rotation.

Exercice 4. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Quelle relation simple lie les nombres $\cos(2\pi/5)$ et $\omega + \dfrac{1}{\omega}$?
2. Justifier l'identité :
$$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right) - 1 = 0.$$
3. En déduire la valeur de $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 5. On note A le point d'affixe $4+2i$ et O celui d'affixe 0.
Calculer les affixes des points B tels que le triangle OAB soit équilatéral.