Feuille n° 6

Exercice 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 24.

Exercice 2. Démontrer par récurrence que $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9 pour chaque entier $n > 0$.

Exercice 3. Effectuer la division euclidienne de a par b pour les valeurs de a et b suivantes :

1. $a = 2867$ et $b = 6$;
2. $a = 7813$ et $b = -12$;
3. $a = -959$ et $b = 6$;
4. $a = -1733$ et $b = -5$.

Exercice 4. Calculer le pgcd de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.

Exercice 5. Trouver toutes les solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{Z}^2$:

1. $18x + 5y = 11$;
2. $39x - 12y = 121$;
3. $14x - 21y = 49$;
4. $58x + 21y = 1$;
5. $14x + 35y = 21$;
6. $637x + 595y = 29$.

Exercice 6.
1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a+b, ab) = 1$.
2. A-t-on, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a + b, ab)$?

Exercice 7. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que

1. $\mathrm{pgcd}(p, q) = 6$ et $\mathrm{ppcm}(p, q) = 21$.
2. $\mathrm{pgcd}(p, q) = 7$ et $p\,q = 21$.
3. $\mathrm{pgcd}(p, q) = 18$ et $p + q = 360$.
4. $\mathrm{ppcm}(p, q) = 7$ et $p\,q = 20$.

Exercice 8.
1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 12.
2. Énumérer les diviseurs de 12.

Exercice 9.
1. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de N le nombre de diviseurs positifs de N et leur somme.
2. Déterminer l'ensemble des entiers positifs possédant 6 diviseurs positifs de somme 28.

Exercice 10.

Résoudre en $x \in \mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 13 \; [19] \\ x \equiv 6 \; [12]. \end{cases}$

Exercice 11. 1. Déterminer l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}^\star$ tels que $7^k \equiv 1\,[12]$.

2. Déterminer l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}^\star$ tels que $6^k \equiv 0\,[12]$.
3. Déterminer l'ensemble des couples $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k_1 < k_2$ et $3^{k_1} \equiv 3^{k_2}[12]$.
4. Déterminer les restes de la division euclidienne par 12 des nombres suivants : 7^{30}, 6^{13}, 3^{17}, 31^{77}, $19^5 + 30^{144} + 15^{10}$.

Exercice 12. 1. Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

2. Déterminer le dernier chiffre dans l'écriture décimale de 3^{1111}.

Exercice 13. Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$;
2. $2^a - 1$ premier $\quad\Rightarrow\quad a$ premier ;
3. $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$.

Exercice 14. Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 15. Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 16. Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ si n est impair.
2. Montrer que $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$ si n est pair.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $(a + b + c)^2$. En déduire le reste modulo 8 de $2(ab + bc + ca)$.
4. Existe-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = ab + bc + ca$?

Exercices à préparer pour le contrôle du 11 décembre.

Exercice 1. Calculer le pgcd des nombres suivants :

$$(a)\ 126 \text{ et } 230, \qquad (b)\ 390 \text{ et } 722, \qquad (c)\ 180 \text{ et } 607.$$

Dans chaque cas, exprimer l'identité de Bézout.

Exercice 2.

1. Existe-t-il des entiers relatifs x et y tels que $161x + 368y = 15$? Si oui, trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Existe-t-il des entiers relatifs x et y tels que $161x + 368y = 115$? Si oui, trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 3. Soient a, b et n des entiers positifs. Montrer que n et ab sont premiers entre eux si et seulement si n et a le sont, ainsi que n et b.

Exercice 4. Déterminer le reste de la division euclidienne de 122^{137} par 9.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que la fraction $\dfrac{n+9}{n+2}$ soit irréductible.