Algèbre I : Structures fondamentales — Licence STS Portail Maths/Info
Semestre automne 2015-2016 — Université Claude Bernard - Lyon 1

Feuille n° 5

Exercice 1. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$.

Exercice 2. Montrer par récurrence la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|.$$

Indication : utiliser la formule trigonométrique $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$.

Exercice 4. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!.$$

Exercice 5. Soit a et b deux nombres complexes. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers déterminée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 7. Montrer par récurrence que tout entier $n \geq 1$ s'écrit sous la forme $n = 2^k(2m+1)$ avec k, $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Supposons $u_0 \leq 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 0$.
2. Supposons $u_0 \geq 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2^n u_0$.

Exercices à préparer pour le contrôle du 11 décembre.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Calculer $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, $u_4 - u_3$, $u_5 - u_4$.
2. Conjecturer une écriture pour u_n en fonction de n.
3. Démontrer par récurrence cette conjecture

Exercice 2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 3. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $u_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u_{n+1} - 2u_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier u_n est divisible par 7.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \leq n$. Démontrer par récurrence que f est l'application identité.