Feuille n° 4

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$f_1: \begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{N}\\ x \mapsto x\end{array}$ $\quad f_2: \begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\end{array}$ $\quad f_3: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^2\end{array}$ $\quad f_4: \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C}\\ z \mapsto z^2\end{array}$ $\quad f_5: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^3\end{array}$

$f_6: \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C}\\ z \mapsto z^3\end{array}$ $\quad f_7: \begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \cos(x)\end{array}$ $\quad f_8: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x < 0\\ x^2 & \text{si } x \geq 0\end{cases}$

$u: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ telle que $u^{-1}(\{1\}) = \{3\}, u^{-1}(\{2\}) = \{1\}, u^{-1}(\{3\}) = \{2\}$;

$v: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ telle que $v^{-1}(\{1\}) = \{1,2\}, v^{-1}(\{2\}) = \{4\}, v^{-1}(\{3\}) = \{3\}$;

l'application linéaire $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g_1(1,0) = (3,5)$ et $g_1(0,1) = (1,2)$;

l'application linéaire $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g_2(1,1) = (0,0)$ et $g_2(1,-1) = (-2,0)$;

l'application linéaire $g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g_3(1,2) = (1,0)$ et $g_3(2,0) = (2,0)$.

Exercice 2. Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\sin^{-1}(\{2\})$
2. $\cos^{-1}([0,1])$
3. $\exp^{-1}(]0,1])$
4. $f^{-1}([-2,1])$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$
5. $g^{-1}([-2,1])$ pour $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto |z|$
6. $h^{-1}([0,1])$ pour $h : [-1,4] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
7. $j^{-1}([0,1[)$ pour $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x$

Exercice 3. On considère une application $f : I \to J, x \to x^2$ où I, J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Trouver I et J tels que : (a) f est injective mais pas surjective ; (b) f est surjective mais pas injective ; (c) f est bijective.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & \lambda^4 - 1\end{pmatrix}$ dans la base canonique. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, f est-elle bijective ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est strictement monotone alors f est injective.

Exercice 7. Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'homothétie de centre $1 + i$ et de rapport 3 et g la translation par $2 + 2i$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ et expliciter leurs natures.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$. Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, +1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$, définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$, est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 10.

1. Soit un nombre complexe $z = re^{i\theta}$ avec $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Déterminer le module et un argument de $z + |z|$.
2. On considère $A = \{re^{i\theta} \mid r \in]0, +\infty[, \theta \in]-\pi, \pi[\}$. Décrire géométriquement A.
3. En utilisant la première question, montrer que l'application $f : A \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + |z|$ est injective.
4. L'application f est-elle surjective ? Sinon, déterminer l'image de f.
5. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + |z|$. Comparer l'image de g à celle de f.
6. Déterminer $g^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\mathbb{R})$. L'application g est-elle injective ?

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, et C et D deux parties de F. Montrer que

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
4. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
5. $A \subset f^{-1}(f(A))$
6. $f(f^{-1}(C)) \subset C$

Exercice 12. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $\phi(n) = 2n - 1$ si $n > 0$ et $\phi(n) = -2n$ si $n \leq 0$. (Un ensemble infini E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.)

Exercice 13. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E.

Exercice 14. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{8, 10\}$.

1. Déterminer le nombre d'applications f de E dans F vérifiant la proposition suivante :
$$\forall n \in E,\ n \text{ pair} \iff f(n) \text{ pair} .$$
2. Déterminer le nombre d'injections f de E dans F vérifiant la proposition suivante :
$$\forall n \in E,\ n \text{ pair} \implies f(n) \text{ pair} .$$
3. Déterminer le nombre d'injections f de E dans F vérifiant la proposition suivante :
$$\forall n \in E,\ n \text{ impair} \implies f(n) \text{ impair} .$$

Exercice 15. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Notons F l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$.

1. Quel est le cardinal de F ?
2. Pour toute partie A de E, notons C_A la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par $C_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $C_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Soit φ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans F qui à toute partie A de E associe C_A. Montrer que φ est une application injective. En déduire que φ est bijective.

Exercices à préparer pour le contrôle du 27 novembre

Exercice 1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x,y) = (4x - 3y, 5x - 4y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Cette application est-elle injective, surjective ? (Indication : étudier les variations de f.)
2. Déterminer $f^{-1}([-1,1])$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x+5}{x-1}$.

1. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Montrer qu'il existe un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ et une bijection g de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur F tels que $g(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer g^{-1}.

Exercice 4. Pour toute application s de $]-\infty, 1[$ dans $\mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ s(x) & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Donner un exemple d'application $s :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ pour que a) f_s soit injective mais pas surjective ; b) f_s soit surjective mais pas injective ; c) f_s soit bijective.

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.