Algèbre I : Structures fondamentales — Licence STS Portail Maths/Info
Semestre automne 2015-2016 — Université Claude Bernard - Lyon 1

Feuille n° 3

Exercice 1 ($\star$)**.** Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur directeur, puis les écrire sous forme paramétrique.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(-1, 2)$ et $(3, 1)$.
2. $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $2x - 3y = 5$.
3. $\mathcal{D}_3$ la droite d'équation $y = 3x + 7$.
4. $\mathcal{D}_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3 \}$.

Exercice 2 ($\star$)**.** On rappelle que deux vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ du plan $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (a, b)$.

Montrer que $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $bx - ay = e$ pour un réel e que l'on déterminera.

Exercice 3. Donner une équation cartésienne des droites qui suivent.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(3, 7)$ et de vecteur directeur $(1, -1)$.
2. $\star$ $\mathcal{D}_2 = \{ (1, 4) + t(1, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
3. $\mathcal{D}_3 = \{ (2 + 3t, 4t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
4. $\star$ $\mathcal{D}_4$ la droite passant par $(-1, 1)$ et $(0, 1)$.

Exercice 4 ($\star$)**.** Résoudre en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les systèmes qui suivent. Vous donnerez la nature de l'ensemble des solutions.

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$. 3. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$. 4. $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 8x + 8y = 20 \end{cases}$.

Exercice 5 ($\star$)**.** On considère la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $(1, 1)$ et de vecteur directeur $(-2, 3)$ et la droite $\mathcal{D}_2 = \{ (1 + 3t, 2 - 5t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.

1. Ces deux droites sont-elles parallèles ?
2. Déterminer une équation cartésienne pour chacune de ces droites.
3. Déterminer leur intersection.

Exercice 6 ($\star$)**.** Déterminer si les couples qui suivent forment des bases du plan.

1. $((0, 0), (0, 0))$. 2. $((0, 1), (1, 1))$. 3. $((2, 4), (1, 2))$. 4. $((0, 0), (1, 0))$.
5. $((1, 1), (2, 3))$. 6. $((9, -15), (-12, 20))$. 7. $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{8}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{9}{4}\right)\right)$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Calculer les coordonnées du vecteur $(2, 3)$ dans la base $((3, 4), (5, -2))$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans la base $((2, -2), (4, 3))$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base canonique.

Exercice 8 ($\star$)**.** Étudier si les applications suivantes sont linéaires ou pas.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(x, y) = (y - 3, x + y)$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(x, y) = (2x - \pi y, x + y)$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(x, y) = (0, x^2 + y^2)$.

Exercice 9. Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

1. $\star$ Montrer que si $f(\vec{u}) = \vec{0}$ et $f(\vec{v}) = \vec{0}$ alors f est l'application nulle.
2. $\star$ Montrer que si $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = \vec{v}$ alors f est l'application identité.
3. Montrer que si $(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$ est une base alors f est bijective.

Exercice 10 ($\star$)**.** Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(x, y) = (2x - y, x)$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(x, y) = (x - y, 0)$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(x, y) = (x - y, y - x)$.

Exercice 11 ($\star$)**.** Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans la base $((1, -1), (-1, 2))$.

Exercice 12 ($\star$)**.** Soient la base $(\vec{u}, \vec{v}) = ((2, -1), (1, -1))$ et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(\vec{u}) = (2, -3)$ et $f(\vec{v}) = (3, -1)$.

1. Exprimer les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de la base canonique dans la base $((2, -1), (1, -1))$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 13 ($\star$)**.** Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ayant respectivement pour matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 14 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (2x - y, 3x + 2y)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. La matrice A est-elle inversible. Si oui, calculer A^{-1} et f^{-1}.

Exercice 15. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique.
On appelle *noyau* de f l'ensemble $\operatorname{Ker} f = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$.
On appelle *image* de f l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^2,\ \vec{v} = f(\vec{u})\} = \{f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ pour $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$. Préciser leurs natures géométriques.

4. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donner un critère nécessaire et suffisant pour que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient des droites.

Exercice 16 ($\star$). Pour chaque application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante, donner sa matrice dans la base canonique.

1. Symétrie orthogonale d'axe Ox ;
2. Symétrie orthogonale d'axe $y = x$;
3. Projection orthogonale sur Oy ;
4. Homothétie de centre O et de rapport 2 ;
5. Rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$;
6. Rotation de centre O et d'angle $\pi/3$.

Exercice 17 ($\star$). Soit $\mathcal{D}_1$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + y = 0$ et soit $\mathcal{D}_2$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $3x + y = 0$. Notons s la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à $\mathcal{D}_1$ parallèlement à $\mathcal{D}_2$.

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}_1$ et un vecteur directeur $\vec{v}$ de $\mathcal{D}_2$.
2. Quelle est la matrice de s dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$? Quelle est son inverse ?
3. Calculer la matrice de s dans la base canonique.
4. Soit $\mathcal{D}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x - y = 0$. Trouver une équation de $s(\mathcal{D})$.

Exercice 18 ($\star$). Soit p l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Calculer A^2. Que constate-t-on ?
2. Déterminer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$. Vérifier que ce sont deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont on donnera une équation cartésienne pour chacune.
3. Décrire p de manière géométrique.

Exercice 19. Pour tout nombre réel on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature géométrique de l'application linéaire $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $R(\theta)$?
2. Montrer que l'on a $(R(\theta))^n = R(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient a, b des nombres réels. On suppose $b \neq 0$ et on considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il existe un unique nombre $\lambda > 0$ et un unique $\theta \in]0, 2\pi[$ tels que $A = \lambda R(\theta)$.
4. Calculer $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices à préparer pour le contrôle du vendredi 23 octobre.

Exercice 1. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(1,2)$ et $(5,13)$, et $\mathcal{D}_2 = \{(0,1)+t(1,3) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Déterminer une équation cartésienne pour chacune de ces droites, puis calculer leur intersection.

Exercice 2. Calculer les coordonnées du vecteur $(3,1)$ dans la base $((1,2),(-1,3))$.

Exercice 3. Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est linéaire ou non, et si c'est le cas donner sa matrice dans la base canonique.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(x,y) = (y^2 - x^2, x+y)$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(x,y) = (x+1, y+1)$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(x,y) = (2y, 3x)$,
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(x,y) = (y-x, x-y)$.

Exercice 4. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Trouver un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

   (Indication : pour tout vecteur $\vec{u} = (x,y)$, on a $f(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.)
2. Trouver un vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{u}$.
3. Vérifier que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercices à préparer pour le contrôle du vendredi 13 novembre.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est inversible, puis calculer son inverse. Déterminer un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Pour chaque application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante, donner sa matrice dans la base canonique.

1. Symétrie orthogonale d'axe Oy ;
2. Symétrie orthogonale d'axe $y = 2x$;
3. Projection orthogonale sur Ox ;
4. Homothétie de centre O et de rapport π ;
5. Rotation de centre O et d'angle $\pi/6$;
6. Rotation de centre O et d'angle $3\pi/4$.

Exercice 7. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x - y = 0$ et $\mathcal{D}_2$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + 4y = 0$.

1. Trouver une base $(\vec{u}, \vec{v})$ tel que la matrice de la symétrie s sur $\mathcal{D}_1$ parallèlement à $\mathcal{D}_2$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $8x - 5y = 0$. Calculer $s(\mathcal{D})$.