Feuille n° 2

Exercice 1 ($\star$). Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres suivants :

1. $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$
2. $z_2 = e^2 e^{i\pi/3}$
3. $z_3 = e^{i\theta} + 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$

Exercice 2 ($\star$). Calculer le module et l'argument des nombres complexes de l'exercice précédent.

Exercice 3. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - cb = 1$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ dont la partie imaginaire est strictement positive, on a :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0 .$$

Exercice 4 ($\star$). Retrouver les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$ pour $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit z un nombre complexe non nul tel que $z^3 = i/\bar{z}$. Montrer que le module de z est égal à 1. Déterminez les valeurs possibles de z.

Exercice 6. Déterminer et représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles de nombres complexes suivants

1. $\star$ $\{z \in \mathbb{C} \mid |1 - z| \leq \frac{1}{2}\}$
2. $\star$ $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(1 - z) \leq \frac{1}{2}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |1 - \frac{1}{z}|^2 = 2\}$
4. $\star$ $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2\}$

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq b$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a l'équivalence

$$|z - a| = |z - b| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 8. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants

a)$\star$ $z_1 = 7 + 24i$, b) $z_2 = 9 + 40i$, c) $z_3 = 1 + i$

Exercice 9. ($\star$)Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^4 + 4 = 0$
2. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$
3. $z^5 - z = 0$

Exercice 10 ($\star$). Résoudre dans $\mathbb{C}$ de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

En déduire la valeur de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On rappelle qu'il existe exactement n nombres complexes z vérifiant $z^n = 1$. Ces nombres sont appelés les n racines n-ièmes de l'unité.

1. $\star$ Représenter dans le plan complexe $\mathbb{C}$ les racines 6-ièmes de l'unité et les racines 4-ièmes de l'unité.
2. On dit que ω est une **racine primitive n-ième de l'unité** si et seulement si toute racine n-ième de l'unité s'écrit comme une puissance de ω.
   (a) $\star$ Quelles sont les racines primitives 6-ième de l'unité ?
   (b) Quelles sont les racines primitives 5-ième de l'unité ?

Exercice 12. ($\star$) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3\theta)$ (resp. $\sin(3\theta)$) en fonction de $\cos(\theta)$ (resp. $\sin(\theta)$).
2. En utilisant la formule du binôme de Newton
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},\ a, b \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$
exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 13. Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. ($\star$) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \ \text{ et } \ \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 15. ($\star$)On considère l'application de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$. Que deviennent par cette transformation

1. un cercle de rayon de centre $(0,0)$ et de rayon r_0 où $r_0 \in \mathbb{R}$?
2. une droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$, où $\theta_0 \in \mathbb{R}$?
3. la droite d'équation $\mathrm{Re}(z) = 2$?

Exercice 16. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On note $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$ et $C = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Montrer que l'application
$$f : D \to D,\ z \mapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}$$
est bien définie, qu'elle est bijective et que $f(C) = C$.

Exercices à préparer pour le contrôle.

Exercice 1. Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

1. $(5 + i)e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$
2. $\frac{1-3i}{9+4i}$

Exercice 2. Calculez les racines carrées des nombres complexes suivants

1. $-3 + 4i$
2. $-3 - 4i$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ de deux façons
$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\ .$$
En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 4. Quellle est l'image du cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1 par la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 4 + z^2$?

Exercice 5. Déterminer les racines primitives 8-ième de l'unité.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$$z^2 - z + 2i + 4 = 0.$$