Feuille n°1

Exercice 1 ($\star$). a) ($\star$) On note $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

b) ($\star$) On note $A = [1, 4[$ et $B =]2, 7]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

c) Déterminer $]2, 6] \cap \mathbb{Z}$, $[-5, 7[\cap \mathbb{N}$ et $]0, 1[\cap \mathbb{Z}$.

d) ($\star$) Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties $]-\infty, 0]$ et $[1, 2[$.

e) Déterminer $]-2, 3] \setminus \mathbb{Z}$, $]-2, 3] \setminus [0, 4]$ et $]-2, 3] \setminus [-4, 4]$.

f) ($\star$) Posons $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\mathbb{N} \setminus A$.

Exercice 2 ($\star$). Décrire les ensembles suivants en écrivant la liste de leurs éléments entre accolades.

a) ($\star$) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\}$;

b) ($\star$) $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 4 \text{ et } n \text{ est divisible par } 2\}$;

c) ($\star$) $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N},\ n \leq m\}$;

d) $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N},\ n < m\}$;

e) ($\star$) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 12 \text{ ou } n \text{ divise } 55\}$;

f) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ne divise pas } 12 \text{ et } n \leq 7\}$.

Exercice 3. Décider si les ensembles suivants sont vides.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x \geq 2\}$;

b) $\left\{x \in]-\infty, 0] \;\middle|\; \dfrac{x+1}{2x-1} > 4\right\}$;

c) $\{(x, y) \in [0, 5] \times [0, 4] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0\}$.

Exercice 4 ($\star$). On considère les ensembles

$$A = \{2n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\} \ , \quad B = \{8n^6 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\} \ \text{ et } \ C = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ m = n^3 + 3\}.$$

Montrer que $B \subseteq A$ et $B \subseteq C$.

Exercice 5. On considère les ensembles

$$E = \left\{x \in [0, 1] \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1}\right\} \ \text{ et } \ F = \left\{x \in [0, 1] \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Les ensembles E et F ont-ils au moins un élément, une infinité d'éléments ou aucun élément ?

Exercice 6. On considère les parties du plan suivantes

$$P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}, \qquad P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 1\},$$
$$P_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + y \leq 1\} \text{ et } \quad P_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - y \leq 1\}.$$

a) Représenter $P_1 \cap P_2$, $P_3 \cap P_4$ et $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

b) Comparer $(P_1 \cap P_2)^c$, $P_1^c \cap P_2^c$, $(P_1 \cup P_2)^c$ et $P_1^c \cup P_2^c$.

Exercice 7 ($\star$). Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

a) Pour tout couple $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, on a $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$;

b) Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$;

c) Il existe un couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$ tel que $xy \geq -4$.

Exercice 8. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \leq 0 \implies x - 1 < 0$;

b) Pour tout réel x, si $x \leq 0$ alors $x - 1 < 0$;

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x - 1 < 0 \implies x \leq 0$.

Exercice 9 ($\star$). Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 - 5x + 6 \leq 0 \implies 2 \leq x \leq 3$;

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \implies \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$.

Exercice 10 ($\star$). Soit la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Dresser le tableau de variations de f puis, pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse.

a) ($\star$) $\forall x \in [2, 3[,\ f(x) > 0$;

b) ($\star$) $\forall x \in [-2, 2],\ f(x) < 0$;

c) ($\star$) $\forall x \in]0, +\infty[,\ \exists y \in]-\infty, 0],\ f(x) < f(y)$;

d) $\exists y \in]-\infty, 0],\ \forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) < f(y)$;

e) ($\star$) $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ \ x < y \implies f(x) < f(y)$;

f) $\forall (x, y) \in]-\infty, 0[^2,\ \ x < y \implies f(x) < f(y)$.

Exercice 11. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$;

b) $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = -|x|)$;

c) $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ y - x + x^2 < 0$;

d) $\exists y \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z},\ y - x + x^2 > 0$.

Exercice 12. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

a) $\exists x \in \mathbb{Z},\ 6x^2 + x - 1 = 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{Q},\ 6x^2 + x - 1 = 0$;

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 = 0$;

d) $\exists x \in \mathbb{C},\ x^2 + x + 1 = 0$.

Exercices à préparer pour le premier contrôle.

Exercice 1. Soit $A = [1, 3]$, $B =]2, 4]$ et $C = [1, 2[$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \cap C$ et $B \setminus C$.

Exercice 2. Décrire les ensembles suivants en écrivant la liste de leurs éléments entre accolades.

a) $\{n \in \mathbb{Z} \mid -5 < n < 2\}$;

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 + x - 1 \leq 0\}$;

c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + x - 1 = 0\}$;

d) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est multiple de 4 et } n \text{ divise } 24\}$.

Exercice 3. On note $A = \{n^6 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que $A \subseteq B$. Montrer que $B \neq A$.

Exercice 4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 > 4 \implies x > 2$;

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \leq -3 \implies x^2 > 8$;

c) $\exists x \in [0, +\infty[,\ x < \sqrt{x}$;

d) $\forall (x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1],\ -28 \leq xy \leq 8$.