

Feuille n°1

Exercice 1 (★). a) (★) On note $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

b) (★) On note $A = [1, 4[$ et $B =]2, 7]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

c) Déterminer $]2, 6] \cap \mathbb{Z}$, $[-5, 7[\cap \mathbb{N}$ et $]0, 1[\cap \mathbb{Z}$.

d) (★) Déterminer le complémentaire dans \mathbb{R} des parties $] - \infty, 0]$ et $[1, 2[$.

e) Déterminer $] - 2, 3] \setminus \mathbb{Z}$, $] - 2, 3] \setminus [0, 4]$ et $] - 2, 3] \setminus [-4, 4]$.

f) (★) Posons $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\mathbb{N} \setminus A$.

Exercice 2 (★). Décrire les ensembles suivants en écrivant la liste de leurs éléments entre accolades.

a) (★) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\}$;

b) (★) $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 4 \text{ et } n \text{ est divisible par } 2\}$;

c) (★) $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$;

d) $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n < m\}$;

e) (★) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 12 \text{ ou } n \text{ divise } 55\}$;

f) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ne divise pas } 12 \text{ et } n \leq 7\}$.

Exercice 3. Décider si les ensembles suivants sont vides.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x \geq 2\}$;

b) $\left\{x \in] - \infty, 0] \mid \frac{x+1}{2x-1} > 4\right\}$;

c) $\{(x, y) \in [0, 5] \times [0, 4] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0\}$.

Exercice 4 (★). On considère les ensembles

$A = \{2n^2+3 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{8n^6+3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $C = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, m = n^3+3\}$.

Montrer que $B \subseteq A$ et $B \subseteq C$.

Exercice 5. On considère les ensembles

$$E = \left\{x \in [0, 1] \mid \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\} \text{ et } F = \left\{x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Les ensembles E et F ont-ils au moins un élément, une infinité d'éléments ou aucun élément ?

Exercice 6. On considère les parties du plan suivantes

$$P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}, \quad P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 1\}, \\ P_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + y \leq 1\} \text{ et } P_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - y \leq 1\}.$$

a) Représenter $P_1 \cap P_2$, $P_3 \cap P_4$ et $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ dans le plan \mathbb{R}^2 .

b) Comparer $(P_1 \cap P_2)^c$, $P_1^c \cap P_2^c$, $(P_1 \cup P_2)^c$ et $P_1^c \cup P_2^c$.

Exercice 7 (★). Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

a) Pour tout couple $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, on a $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$;

b) Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$;

c) Il existe un couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$ tel que $xy \geq -4$.

Exercice 8. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0 \implies x - 1 < 0$;

b) Pour tout réel x , si $x \leq 0$ alors $x - 1 < 0$;

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < 0 \implies x \leq 0$.

Exercice 9 (★). Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 6 \leq 0 \implies 2 \leq x \leq 3$;

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

Exercice 10 (★). Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Dresser le tableau de variations de f puis, pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse.

- a) (★) $\forall x \in [2, 3[, f(x) > 0$;
- b) (★) $\forall x \in [-2, 2], f(x) < 0$;
- c) (★) $\forall x \in]0, +\infty[, \exists y \in]-\infty, 0], f(x) < f(y)$;
- d) $\exists y \in]-\infty, 0], \forall x \in]0, +\infty[, f(x) < f(y)$;
- e) (★) $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, x < y \implies f(x) < f(y)$;
- f) $\forall (x, y) \in]-\infty, 0]^2, x < y \implies f(x) < f(y)$.

Exercice 11. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$;
- b) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$;
- c) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, y - x + x^2 < 0$;
- d) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, y - x + x^2 > 0$.

Exercice 12. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

- a) $\exists x \in \mathbb{Z}, 6x^2 + x - 1 = 0$;
- b) $\exists x \in \mathbb{Q}, 6x^2 + x - 1 = 0$;
- c) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$;
- d) $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 + x + 1 = 0$.

Exercices à préparer pour le premier contrôle.

Exercice 1. Soit $A = [1, 3], B =]2, 4]$ et $C = [1, 2[$.

Déterminer $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \cap C$ et $B \setminus C$.

Exercice 2. Décrire les ensembles suivants en écrivant la liste de leurs éléments entre accolades.

- a) $\{n \in \mathbb{Z} \mid -5 < n < 2\}$;
- b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 + x - 1 \leq 0\}$;
- c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + x - 1 = 0\}$;
- d) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est multiple de } 4 \text{ et } n \text{ divise } 24\}$.

Exercice 3. On note $A = \{n^6 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Montrer que $A \subseteq B$. Montrer que $B \neq A$.

Exercice 4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \implies x > 2$;
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \implies x^2 > 8$;
- c) $\exists x \in [0, +\infty[, x < \sqrt{x}$;
- d) $\forall (x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1], -28 \leq xy \leq 8$.