Feuille d'exercices V.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f\colon X \to]0,+\infty[$ une fonction intégrable. On fixe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$. Montrer que la suite $\left(\int_A f^{1/n} d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty.$$

En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n\colon [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Commenter ce résultat.

Exercice 4. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable. Vérifier que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n\colon [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f.
2. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x)dx.$$
3. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, on a $1 - t \leq e^{-t}$.
4. En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$
6. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 6. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

Exercice 7. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives μ-intégrables convergente vers 0 μ-pp.

1. Expliquer pourquoi la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ est convergente μ-pp.
2. Donner un sens à $\displaystyle\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n \right) d\mu$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_X f_n d\mu$ est convergente et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n \right) d\mu.$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$

1. Pourquoi f est-elle borélienne ?
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$
est semi-convergente.
3. Soit $k \geq 0$. Montrer que
$$\int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \geq \frac{1}{3(2k+1)}.$$
4. En déduire que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f est borélienne.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, la fonction qui a x associe $f(x^n)$ est λ-intégrable sur $[0, 1]$, où λ est la mesure de Lebesgue.
3. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f(x^n) d\lambda(x) \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.