Feuille d'exercices II : algèbres, σ-algèbres, boréliens.

Exercice 1.
1. Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une algèbre.
2. Soit X un ensemble, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une algèbre sur X. Soit A, B des éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que $A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \Delta B \in \mathcal{A}$.

Exercice 2. Les classes suivantes sont-elles des algèbres, des σ-algèbres ?
— $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que A est finie$\}$.
— $\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que A est finie ou $\mathbb{R} \setminus A$ est finie$\}$.
— $\mathcal{A}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que A est au plus dénombrable ou $\mathbb{R} \setminus A$ est au plus dénombrable$\}$.

Exercice 3. Quelle est la σ-algèbre sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 4. Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.
1. Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre sur Y, montrer que $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ est une σ-algèbre sur X.
2. Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X montrer que $\{B : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une σ–algèbre sur Y.

Exercice 5. Vérifier que les ensembles suivants engendrent les boréliens de $\mathbb{R}$.
— $\mathcal{I}_1 = \{]a, b[: a,\ b \in \mathbb{R} \text{ et } a < b\}$.
— $\mathcal{I}_2 = \{[a, b] : a,\ b \in \mathbb{R} \text{ et } a < b\}$.
— $\mathcal{I}_3 = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6. Soit X un ensemble et E une partie de X. Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X on pose

$$\mathcal{A}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\} .$$

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de X alors $\mathcal{A}_E$ est une σ-algèbre de E.
2. Montrer que $(\sigma(\mathcal{A}))_E = \sigma(\mathcal{A}_E)$.
3. En déduire que les boréliens de $\mathbb{R}$ sont les intersections de $\mathbb{R}$ avec les boréliens de $\mathbb{C}$.