Complément de cours I.

Le but de ce complément est de donner des détails sur le lemme suivant, qui a été vu en cours.
Dans la suite $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré. On notera $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique d'un sous-ensemble A de X.

Lemme. Soit s, t deux fonctions étagées sur X à valeurs positives. Alors on a les propriétés suivantes :

1. Pour toute partie mesurable E, $\displaystyle\int_E (s+t)d\mu = \int_E sd\mu + \int_E td\mu$.
2. Si on a $s(x) \leq t(x)$ pour tout $x \in X$ alors pour toute partie mesurable E on a $\displaystyle\int_E sd\mu \leq \int_E td\mu$.
3. Pour toute partie mesurable E, on a $\displaystyle\int_E sd\mu = \int_X s \cdot \mathbf{1}_E d\mu$
4. L'application ϕ: $E \mapsto \displaystyle\int_E sd\mu$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Avant de démontrer ces propriétés, il est intéressant de faire une remarque : il existe beaucoup de façons différentes d'écrire une fonction étagée s sous la forme $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. En effet, certains α_i peuvent être répétés, et les A_i ne pas être forcément disjoints, dans une telle écriture. Par exemple, la fonction caractéristique de $[0, 1]$ est la somme de la fonction caractéristique de $[0, 1/2]$ et de la fonction caractéristique de $]1/2, 1]$. La première propriété énoncée ci-dessus dit que, du moment qu'on peut écrire une fonction simple positive s sous la forme $\displaystyle s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, on a

$$\int_E sd\mu = \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n \int_E \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} \text{ (cf (1.)) } = \sum_{i=1}^n \mu(E \cap A_i) \ .$$

Autrement dit, du moment qu'on peut écrire une fonction simple positive s sous la forme $\displaystyle s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, on a $\displaystyle\int_E sd\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E)$: la définition de l'intégrale d'une fonction étagée ne dépend pas de la façon dont on écrit la fonction comme une fonction étagée.

Preuve du lemme.

Pour pouvoir appliquer la définition, commençons par écrire s sous la forme $\displaystyle s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $\displaystyle t = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$, de telle façon que les α_i (respectivement, β_j) soient deux à deux distincts et les A_i (resp. B_j) soient deux à deux disjoints.

<u>Preuve de (1) :</u> On pose $C_{i,j} = A_i \cap B_j$; alors on a $\displaystyle s + t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{C_{i,j}}$. En effet, les $C_{i,j}$ sont deux à deux disjoints, et sur $C_{i,j}$ (s'il est non vide) on a $s = \alpha_i$ et $t = \beta_j$, donc $s+t = \alpha_i + \beta_j$. La formule ci-dessus ne correspond pas tout à fait à une écriture de $s + t$ permettant d'appliquer la définition de l'intégrale vue en cours : certains $C_{i,j}$ peuvent être vides (mais dans ce cas là leur mesure vaut 0 et donc ce n'est pas vraiment un problème), mais aussi les $\alpha_i + \beta_j$ ne sont pas forcément deux à deux distincts. Cela dit, si on appelle $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ les valeurs prises par les $\alpha_i + \beta_j$, et C_k la réunion de tous les $C_{i,j}$ tels

que $\alpha_i + \beta_j = \gamma_k$, alors les C_k sont deux à deux disjoints, les γ_k deux à deux distincts, et on a

$$s + t = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \mathbf{1}_{C_k} \ .$$

Sous cette forme on peut appliquer notre définition de l'intégrale, et obtenir que

$$\int_E (s+t)d\mu) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \mu(C_k \cap E)$$

Maintenant, chaque $C_k \cap E$ est la réunion disjointe des $C_{i,j} \cap E$ pour les (i,j) tels que $\alpha_i + \beta_j = \gamma_k$, et on peut donc réécrire cela sous la forme

$$\int_E (s+t)d\mu) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j)\mu(C_{i,j} \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu(C_{i,j} \cap E) \right) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(C_{i,j} \cap E) \right)$$

A i fixé, les $C_{i,j} \cap E$ sont deux à deux disjoints et leur réunion pour j variant de 1 à m est égale à $A_i \cap E$; on a donc $\sum_{j=1}^{m} \mu(C_{i,j} \cap E) = \mu(A_i \cap E)$. En utilisant le même raisonnement à j fixé, la formule ci-dessus devient

$$\int_E (s+t)d\mu) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j \cap E) = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu \ .$$

Preuve de (2) : On note encore $C_{i,j} = A_i \cap B_j$. Dire que $s \leq t$ revient à dire que $\alpha_i \leq \beta_j$ à chaque fois que $C_{i,j} \neq \emptyset$. Comme ci-dessus, on a pour tout i et pour tout $E \in \mathcal{A}$ que A_i est la réunion disjointe des $C_{i,j} \cap E$, on peut donc écrire $\mu(A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{m} \mu(C_{i,j} \cap E)$. En utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction étagée, on obtient :

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(C_{i,j} \cap E) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(C_{i,j} \cap E)$$

L'inégalité ci-dessus vient du fait que, chaque fois que $\mu(C_{i,j} \cap E) \neq 0$, on a $\alpha_i \leq \beta_j$. Et on a aussi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(C_{i,j} \cap E) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(C_{i,j} \cap E) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) = \int_E t d\mu \ .$$

Ceci donne l'inégalité demandée.
Preuve de (3) : C'est une conséquence immédiate de la définition : $s \cdot \mathbf{1}_E$ est la fonction qui vaut α_i sur chaque $A_i \cap E$ et 0 ailleurs, et on a par conséquent $s \cdot \mathbf{1}_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i \cap E}$, ce qui donne

$$\int_X s \mathbf{1}_E d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E \cap X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \int_E s d\mu \ .$$

Preuve de (4) : Montrons que φ vérifie les propriétés définissant une mesure. Par définition, et puisque s est positive, ϕ est à valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus on a $\phi(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap \emptyset) = 0$.

Soit maintenant (E_k) des ensembles mesurables deux à deux disjoints, et E la réunion des E_k. Alors on a

$$\begin{aligned}
\phi(E) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (E_k \cap A_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(E_k \cap A_i) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi(E_k) \ .
\end{aligned}$$