Rattrapage Interrogation 2, 28 novembre 2014, durée 1h.

Notes de cours et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction ; le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer.

Exercice 1 (15 points).

1. On fixe un réel x. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t}\, e^{tx}\, dt$ converge si et seulement si $x < -1$.

   Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t}\, e^{tx}\, dt$ pour tout $x \in]-\infty, -1[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, -1[$ et donner une formule pour la dérivée de F qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.
3. Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
4. Donner une formule exprimant la valeur de $F(x)$ pour tout $x < -1$ qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.

Exercice 2 (5 points). On considère la mesure de Lebesgue λ sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}([0,1]) \colon \lambda(A) = 0,\ \lambda(A) = 1/2 \text{ ou } \lambda(A) = 1\} .$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas une σ-algèbre.
2. Soit $\alpha \in [1/2, 1]$. Montrer que $[1/2, \alpha]$ est dans $\sigma(\mathcal{A})$, la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$.
3. En déduire que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}([0, 1])$.