Interrogation 2, 7 novembre 2014, durée 2h30.

Notes de cours et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction ; le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer.

Exercice 1 (Question de cours - 3 points)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f\colon X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $t > 0$ on a $\mu(\{x\colon f(x) \geq t\}) \leq \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_X f d\mu$.

Exercice 2 (4 points)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $\mathcal{A}'$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A}\colon \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\} \ .$$

Montrer que $\mathcal{A}'$ est une σ-algèbre.

Exercice 3 (10 points)**.**

1. On fixe un réel x. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^x \ln(t)}\, dt$ converge si et seulement si $x > 2$.
   Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^x \ln(t)}\, dt$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]2, +\infty[$ et donner une formule pour la dérivée de F qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.
3. Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Donner une formule exprimant la valeur de $F(x)$ pour tout $x > 2$ qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.

Exercice 4 (5 points)**.** Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable.

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n = f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(E_n) \leq \int_E f d\mu \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\mu(E_n) \ .$$
   (b) On suppose que μ est finie. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$.
2. On ne suppose plus que μ est finie. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(F_n) < +\infty$.

T.S.V.P

Exercice 5 (5 points)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$.

1. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(a_n x)| dx < +\infty \ .$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n x)$ est absolument convergente pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Que est la limite simple presque partout de $f(n^2 x)$?