Correction de l'interrogation du 17 octobre.

Exercice 1. 1. La fonction f est un quotient de deux fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas ; par conséquent f est elle-même continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc borélienne. De plus, une primitive de f est $-\dfrac{1}{2(1+x^2)}$, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Par conséquent f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ au sens de Riemann, d'intégrale égale à $\left[-\dfrac{1}{2(1+x^2)}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}$. Comme f est positive et continue, le fait qu'elle soit intégrable au sens de Riemann entraîne qu'elle est intégrable au sens de Lebesgue, et son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut $\dfrac{1}{2}$.

2. On commence par fixer $x \in \mathbb{R}^+$, et examiner la suite $\exp\left((\sin(x))^n\right)$: cette suite tend vers 1 quand $|\sin(x)| < 1$, est constante égale à e quand $\sin(x) = 1$, et égale à $\exp\left((-1)^n\right)$ quand $\sin(x) = -1$. En particulier, si $x \not\in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{N}\}$ on voit que $\exp\left((\sin(x))^n\right)$ converge vers 1 ; puisque $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, il est de mesure nulle au sens de Lebesgue, et on vient de montrer que $\exp\left((\sin(x))^n\right) f(x)$ tend vers $f(x)$ presque partout.
   De plus, on a $\sin(x)^n \leq 1$ pour tout x ; comme la fonction exp est croissante et f est positive, on en déduit que $0 \leq \exp\left((\sin(x))^n\right) f(x) \leq e\, f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a vu que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $e\,f$ l'est aussi et on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left((\sin(x))^n\right) f(x) dx\right)_{n\geq 0}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Fixons $n \geq 2$; alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $0 \leq \dfrac{1}{1+x+\ldots+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$; ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+\ldots+x^n}$ est une fonction continue, à valeurs positives, majorée par une fonction intégrable, et est donc elle-même intégrable. Autrement dit, $I_n < +\infty$.
Si l'on fixe $x \in \mathbb{R}^+$, alors la suite $1+x+\ldots+x^n$ tend vers $+\infty$ si $x \geq 1$, et vers $\dfrac{1}{1-x}$ si $x < 1$; par conséquent, la suite de fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+\ldots+x^n}$ converge simplement vers la fonction qui vaut $1-x$ sur $[0,1[$ et 0 sur $[1,+\infty[$.
On a vu de plus que cette suite de fonctions est dominée par $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$; par conséquent on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. 1. Pour $n \geq 1$, notons $A_n =]-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}[$. Alors $A_{n+1} \subseteq A_n$ pour tout n, $A_1 =]-1,1[$ est de mesure finie (d'après (C_1)), et $\cap_{n\geq 1} A_n = \{0\}$. Toutes les hypothèses sont donc réunies pour appliquer un théorème du cours et conclure que $\mu(A_n)$ converge vers $\mu(\{0\})$, qui vaut 0 d'après (C_2).

2. $\mathbb{Q}$ est dénombrable, autrement dit on peut écrire
$$\mathbb{Q} = \{q_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}\ .$$

On a donc $\mu(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(\{q_n\}) = 0$.

3. Comme A est borélien, $A \cap [-|x|, |x|]$ est aussi un borélien pour tout x, en tant qu'intersection de deux boréliens. De plus A est contenu dans $[-x, x]$, qui est de mesure finie ; par conséquent $\mu(A) \leq \mu([-x, x])$ est finie aussi. La fonction f_1 est donc bien définie.

   Puisque $A \cap [-|x|, |x|]$ est contenu dans A, sa mesure est inférieure à celle de A ; par conséquent, dans le cas où $\mu(A) = 0$ f_A est la fonction nulle. C'est en particulier le cas quand $A = \mathbb{Q}$.

4. Dans le cas où $A = \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, on a simplement $\mu(A \cap [-|x|, |x|] = \mu([-|x|, |x|]) = 2|x|$ (figure de gauche ci-dessous) ; si $A = [0, 1]$ et μ est la mesure de Lebesgue, alors $\mu([0, 1] \cap ([-|x|, |x|)) = \min(1, |x|)$ (figure de droite).