Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

INTERPOLATION ET QUADRATURE.

Exercice 1. *Un exemple de polynôme d'interpolation.*

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Déteminer le polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds 0 et 1.
2. Déterminer le polynôme P_2 d'interpolation de Lagrange de f aux noeuds 0, 1/2 et 1. On l'écrira sous forme de Lagrange et sous forme de Newton.
3. Calculer $\int_0^1 P_1(x)dx$ en fonction de $f(0)$ et $f(1)$. Cette formule est à la base de la méthode de quadrature dite *des trapèzes.*
4. Calculer $\int_0^1 P_2(x)dx$ en fonction de $f(0)$, $f(1/2)$ et $f(1)$. Cette formule est à la base de la méthode de quadrature dite *de Simpson.*

Exercice 2. *Interpolations simple et composée.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus [-1,1]$. On définit la fonction $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$.

1. Cacluler les dérivées successives de f.
2. Soit $m \in \mathbf{N}$. On pose, pour $k \in [\![0,m]\!]$, $x_k = -1 + k\frac{2}{m}$.
   (a) On note P_m le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en ces noeuds. Montrer que si $|\alpha| > 3$, alors
   $$\lim_{m\to\infty} \sup_{[-1,1]} |f - P_m| = 0\,.$$
   (b) On note $f_m : [-1,1] \to \mathbf{R}$ la fonction, polynomiale de degré au plus 1 sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \le k \le m-1$, et telle que pour tout $k \in [\![0,m]\!]$, $f_m(x_k) = f(x_k)$.
      i. Donner l'expression de la fonction f_m.
      ii. Donner explicitement $C > 0$ tel que
      $$\sup_{[-1,1]} |f - f_m| \le \frac{C}{m^2}\,.$$

Notations.

Dans toute la suite on note $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ périodique de période 2π (intégrable sur $[0,2\pi]$) : pour tout $k \in \mathbf{Z}$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Exercice 3. *Quelques rappels sur les séries de Fourier.*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de période 2π, de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont bien définis et que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $c_k(f) = \dfrac{1}{(\mathrm{i}k)^p} c_k(f^{(p)})$.
2. Montrer qu'il existe une constante C (dépendant de f et n) telle que pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$,
$$|c_k(f)| \leq \frac{C}{|k|^n}\,.$$
3. On suppose de plus que $n \geq 2$. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement.
On rappelle qu'alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f)\, e^{ikx}$.

Exercice 4. *Méthode des rectangles pour les fonctions périodiques.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Calculer, pour $k \in \mathbf{Z}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{n}}$.
2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{n}} \;=\; \begin{cases} -1 & \text{si } k \in n\mathbf{Z}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\,.$$
3. Soit f une fonction périodique de période 2π et de classe $\mathcal{C}^m$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$.
   (a) Montrer que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f \;-\; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \;=\; -\sum_{k \in n\mathbf{Z}^*} c_k(f)\,.$$
   (b) Donner explicitement C (dépendant de f et m) telle que
$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f \;-\; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right| \;\leq\; \frac{C}{n^m}.$$

Ainsi la méthode des rectangles appliquée au calcul de $\int_a^b f$ *quand* f *est* $(b-a)$*-périodique est d'ordre* ∞*. On dit aussi qu'elle est de précision* spectrale.

Exercice 5. *Interpolation trigonométrique et transformation de Fourier discrète.*

Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On définit
$$\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m, \quad (f_0, \cdots, f_{m-1}) \longmapsto \left(\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_j\, e^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{m}}\right)_{k \in [\![0, m-1]\!]}$$
et
$$\mathcal{G}_m : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m, \quad (c_0, \cdots, c_{m-1}) \longmapsto \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k\, e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{m}}\right)_{j \in [\![0, m-1]\!]}\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{G}_m = (\mathcal{F}_m)^{-1}$.
2. En déduire que pour tout $(f_0, \cdots, f_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$ il existe un unique $(c_0, \cdots, c_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$ tel que $P : [0, 2\pi[\to \mathbf{C}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} c_k\, e^{\mathrm{i}k\,x}$ vérifie, pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $P\left(\frac{2\pi j}{m}\right) = f_j$.

Exercice 6. *Erreur d'interpolation trigonométrique.*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de période 2π, de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Pour tout tout $k \in \mathbf{Z}$, on note

$$c_k^{(m)}(f) \;=\; \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi\, j}{m}\right) e^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{m}}\,.$$

On définit alors

$$P \,:\, \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \quad x \mapsto \sum_{k=-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} c_k^{(m)}(f)\, e^{\mathrm{i}k\,x}\,.$$

1. Montrer que, pour tout $(k,l) \in \mathbf{Z}^2$, on a $c_{k+lm}^{(m)}(f) = c_k^{(m)}(f)$.
2. En déduire que pour tout $l \in \mathbf{Z}$,

$$P_l \,:\, \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \quad x \mapsto \sum_{k=l}^{m+l-1} c_k^{(m)}(f)\, e^{\mathrm{i}k\,x}$$

   vérifie, pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $P_l\left(\frac{2\pi j}{m}\right) = f\left(\frac{2\pi\, j}{m}\right)$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k^{(m)}(f) - c_k(f) \;=\; \sum_{l \in k + m\mathbf{Z}^*} c_l(f)\,.$$

4. Montrer que

$$\sup_{\mathbf{R}} |f - P| \;\leq\; 2 \sum_{|k| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} |c_k(f)| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$