

**Feuille d'exercices n° 4**

MODES PROPRES.

**Exercice 1.** *Théorème de Gerschgorin.*

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ \lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \right\}.$$

**Exercice 2.** *Méthode de la puissance.*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les modes propres de  $A$ .

2. Soit  $x \in \mathbf{C}^2$  non nul.

(a) Calculer  $(A^k x)_{k \in \mathbf{N}}$ .

(b) On pose  $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}} = \left( \frac{A^k x}{\|A^k x\|} \right)_{k \in \mathbf{N}}$ . À quelle condition sur  $x$  la suite

$$\left( \left\langle x^{(k)}, Ax^{(k)} \right\rangle \right)_{k \in \mathbf{N}}$$

converge-t-elle vers une valeur propre de  $A$  ?

**Exercice 3.** *Méthode QR.*

Calculer les itérations successives de la méthode  $QR$  de recherche de valeurs propres pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qu'en conclure ?