**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre automne 2014-2015

Analyse numérique - L3

---

**Corrigé du devoir n° 1**

---

## Exercice 1.

1. $A$ n'admet pas de décomposition LU car son premier mineur est nul. Posons

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^{(1)} = P^{(1)}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$P_A = (P^{(1)})^{-1} = P^{(1)}, \qquad L_A = \mathrm{I}_3 \qquad \text{et} \qquad U_A = A^{(1)}$$

fournit une décomposition PLU de $A$.

Posons

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B^{(1)} = E^{(1)}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définissons alors

$$E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B^{(2)} = E^{(2)}B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$L_B = (E^{(1)})^{-1}(E^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_B = B^{(2)}$$

fournit une décomposition LU de $B$.

2. Soit $x \in \mathbf{C}^3$. Alors

$$\begin{aligned} Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &\iff U_A x = P_A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff U_A x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff x = \begin{pmatrix} 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $y \in \mathbf{C}^3$, on a

$$\begin{aligned} L_B y = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &\iff y = E^{(2)}E^{(1)}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \\ &\iff y = E^{(2)}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \\ &\iff y = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Bx = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &\iff U_B x = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \\ &\iff x = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 2.**

1. Définissons $x^{(1)}$ par

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} x^{(0)} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Alors

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+2\\-0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Définissons ensuite $x^{(2)}$ par

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} x^{(2)} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} x^{(1)} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Alors

$$x^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+2\\-\frac{1}{2}+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Enfin définissons $x^{(3)}$, l'approximation demandée, par

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} x^{(3)} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} x^{(2)} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Alors

$$x^{(3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}+2\\-\frac{3}{4}+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{8}\\\frac{1}{8}\end{pmatrix}.$$

2. Le résidu est

$$Ax^{(3)} - b = \begin{pmatrix}2\times\frac{7}{8}+\frac{1}{8}-2\\\frac{7}{8}+2\times\frac{1}{8}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

dont la norme infini est 1/8.

Pour $x \in \mathbf{C}^2$, on a

$$\begin{aligned} Ax = b &\overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \\ &\iff x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'erreur est donc

$$x^{(3)} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

dont la norme infini est 1/8.

**Exercice 3.**

1. Soit $x \in \mathbf{R}^2$. Puisque $A$ est triangulaire supérieure, $x$ résout le problème aux moindres carrés si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le résidu est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dont la norme est 3.

2. Commençons par obtenir une décomposition QR de $A$. Posons

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^{(1)} = Q^{(1)}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

puis

$$Q^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^{(2)} = Q^{(2)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$Q^{(2)}Q^{(1)}b = Q^{(2)} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $x \in \mathbf{R}^2$. Alors $x$ résout le problème aux moindres carrés si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le résidu est

$$(Q^{(1)})^{-1}(Q^{(2)})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dont la norme est 2.

**Exercice 4.**

1. La proposition est fausse. En effet, pour $n = 1$ et $A = \mathrm{I}_1$, on a $\rho(A) = 1$ mais $\mathrm{I}_1 - A$ est la matrice nulle et donc n'est pas inversible.

2. La proposition est juste. En effet, les valeurs propres de
$$A^*A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
sont les racines du polynôme
$$(X-1)(X-2)-1 \;=\; X^2-3X+1 \;=\; (X-\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{5}{4}.$$
Les valeurs propres de $A^*A$ sont donc
$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
Comme
$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
le conditionnement en norme 2 de $A$ est bien
$$\sqrt{(3+\sqrt{5})/(3-\sqrt{5})}\,.$$

3. La proposition est juste. La matrice d'itération associée à la méthode est
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
dont le rayon spectral $\frac{1}{4}$ est strictement plus petit que 1.

4. La proposition est juste. En effet, les valeurs propres de $A$ sont les racines de $(X-3)^2-1$, c'est-à-dire 2 et 4. Ces valeurs propres sont bien de modules distinctes. Par ailleurs
$$A\,X^{(0)} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\neq\; 2\,X^{(0)}\,.$$
Donc dans une décomposition spectrale la composante de $X^{(0)}$ associée à la valeur propre 4 est non nulle. D'où la convergence.

5. La proposition est fausse. En effet,
$$A\,X^{(0)} \;=\; 2\,X^{(0)}$$
donc dans une décomposition spectrale la composante de $X^{(0)}$ associée à la valeur propre 4 est nulle.