Préparation au test du 21 novembre

Exercice 1

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x-3} - \sqrt{x^2-2x+1}$.
2. Déterminer les points où la fonction $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ n'est pas définie et calculer les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers ces points. Calculer ensuite la limite de g en $\pm\infty$.
3. Soit $h(x) = \frac{|x|+x^2}{x+x^3}$. Calculer les limites pour $x \to 0^+$ et $x \to 0^-$ de $h(x)$. Que peut-on dire de $\lim_{x\to 0} h(x)$?

Exercice 2 [produit d'équivalents]

1. Que signifie la notation $f(x) \sim g(x)$ pour $x \to x_0$?
2. Démontrer que si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ pour $x \to x_0$, alors $(f_1 f_2)(x) \sim (g_1 g_2)(x)$ pour $x \to x_0$. Montrer qu'en général $(f_1+f_2)(x)$ n'est pas équivalent à $(g_1+g_2)(x)$ pour $x \to x_0$.

Exercice 3

1. Énoncer le théorème des valeurs intemédiaires.
2. Calculer les limites pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{5x^2-16x+12+\sin(\alpha x)}{\alpha^2 x^2+1}$, où $\alpha \in \mathbf{R}^*$ est un paramètre.
3. Trouver un $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) < 0$
4. En déduire que f possède au moins deux zéros.

Exercice 4 On considère la fonction $f(x) = \cos(x + \frac{1}{x})$.

1. Calculer la limite pour $n \to +\infty$ des suites $f(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ et $f(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)$.
2. Étudier la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Étudier la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 5 Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Calculer les limites pour $x \to +\infty$ des fonctions suivates

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{\exp(x)}}{x^m}, \qquad f_2(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x^m}, \qquad f_3(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}, \qquad f_4(x) = \frac{\exp((\ln(x))^2)}{x^m}.$$