Préparation au test du 17 octobre

Exercice 1 Démontrer que si $a_n \to a$ et $b_n \to b$, où a et b sont deux nombres réels, alors la suite $(a_n b_n)$ converge vers ab.

Exercice 2 Soit

$$u_n = \frac{p_n}{\sqrt{n}}$$

où

$$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante. La suite (u_n) est-elle bornée ? Peut-on conclure que (u_n) converge vers un nombre rationnel ? Et vers un nombre réel ?

Exercice 3 Soit (u_k) une suite rélle vérifiant $\frac{1}{5^k} \leq u_k \leq \frac{1}{4^k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Démontrer que (S_n) converge vers une limite ℓ vérifiant $\frac{5}{4} \leq \ell \leq \frac{4}{3}$.

Exercice 4 La somme de deux suites réelles divergentes est-elle divergente ? Et la somme d'une suite convergente avec une suite divergente ? La somme de deux suites de Cauchy est-elle de Cauchy ? Illustrer vos réponses avec une démonstration ou un contrexemple.

Exercice 5 Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $x_{n+1} = -(x_n)^2$ et $x_0 \in]-1,0[$. Démontrer par récurrence que $x_n \in]-1,0[$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que (x_n) est croissante, en déduire la convergence et calculer la limite.

Exercice 6

i) Démontrer avec la définition de limite que $\sqrt{n} \to +\infty$.

ii) En appliquant le théorème des gendarmes, calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n + 1}.$$